CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

EXERCICE 1

1. Par définition de u_n, on a :

$$\mathbf{u_0} = \int_0^1 f_0(x)\,dx = \int_0^1 e^{-3x}dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{3}\left(1-e^{-3}\right)}$$

2.a. On a les équivalences :

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$$

On a donc, pour tout réel x de $[0,1]$ et pour tout entier naturel n :

$$(1-x)^n \geq 0 \text{ et } e^{-3x} > 0$$

Il en résulte que, pour tout réel x de $[0,1]$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$f_n(x) = (1-x)^n e^{-3x} \geq 0$$

Par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment, il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n \geq 0}$$

b. On a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)dx \\ &= \int_0^1 \left((1-x)^{n+1}e^{-3x} - (1-x)^n e^{-3x}\right)dx = \int_0^1 (1-x-1)(1-x)^n e^{-3x}dx \\ &= \int_0^1 \left(-x(1-x)^n e^{-3x}\right)dx = \int_0^1 \left(-xf_n(x)\right)dx \end{aligned}$$

On a, pour tout réel x de $[0,1]$:

$$-x \leq 0 \text{ et } f_n(x) \geq 0 \text{ (vu à la question 2.a)}$$

On a donc, pour tout réel x de $[0,1]$:

$$-xf_n(x) \leq 0$$

Par négativité de l'intégrale d'une fonction négative sur un segment, il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_{n+1} - u_n \leq 0}$$

c. D'après les questions 2.a et 2.b, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0) et décroissante ; le théorème de la convergence monotone assure que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente**.

3.a. On a :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -3x \leq 0 \Rightarrow e^{-3x} \leq 1$$

Puisque $(1-x)^n$ est positif ou nul sur $[0,1]$, il vient, par multiplications d'inégalités, pour tout réel x de $[0,1]$ et pour tout entier naturel n :

$$f_n(x)=(1-x)^n e^{-3x} \leq (1-x)^n$$

Par intégration de cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient, pour tout entier naturel n :

$$u_n=\int_0^1 f_n(x)dx \leq \int_0^1 (1-x)^n dx$$

On a :

$$\int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

b. D'après les questions 2.a et 3.a, on a, pour tout entier naturel n, l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}=0$, le théorème d'encadrement assure que :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

4.a. On a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=\int_0^1 f_{n+1}(x)dx=\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-3x}dx$$

On pose :

$$u(x)=(1-x)^{n+1} \qquad u'(x)=-(n+1)(1-x)^n$$
$$v'(x)=e^{-3x} \qquad v(x)=-\frac{1}{3}e^{-3x}$$

u, v, u' et v' étant continues sur $[0,1]$, il vient, grâce au théorème d'intégration par parties:

$$u_{n+1}=\left[-\frac{1}{3}(1-x)^{n+1}e^{-3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}(n+1)(1-x)^n e^{-3x}dx = \frac{1}{3}-\frac{n+1}{3}\int_0^1 (1-x)^n e^{-3x}dx$$

On a bien, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{n+1}{3}u_n}$$

b. On déduit de la question 4.a les équivalences :

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}-\frac{n+1}{3}u_n \Leftrightarrow 3u_{n+1}=1-(n+1)u_n \Leftrightarrow 3u_{n+1}=1-nu_n-u_n \Leftrightarrow nu_n=1-u_n-3u_{n+1}$$

D'après la question 3.b, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ; on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=0$$

Il en résulte que :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} nu_n} = \lim_{n\to+\infty}(1-u_n-3u_{n+1}) = \mathbf{1}$$

5.a. La suite $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la somme partielle de rang n de la série exponentielle $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n 3^n}{n!}$, qui converge et dont la somme vaut e^{-3} ; on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^k}{k!}=e^{-3}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^k}{k!} - e^{-3}\right) = 0$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}} v_n$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a, d'après la question 1 :

$$\frac{(-1)^0 0!}{3^{0+1}} v_0 = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{0}\frac{(-1)^k 3^k}{k!} - e^{-3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^0 3^0}{0!} - e^{-3}\right) = \frac{1}{3}\left(1-e^{-3}\right) = u_0$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}} v_n$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{3^{n+2}} v_{n+1}$$

On a, d'après la question 4.a et l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} u_n = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} \cdot \frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}} v_n = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{3^{n+2}} v_n$$

Par définition de v_n, on a :

$$v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k 3^k}{k!} - e^{-3} = \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^k}{k!} - e^{-3} = \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1}}{(n+1)!} + v_n$$

Il vient donc :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{3^{n+2}}\left(v_{n+1} - \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1}}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{3^{n+2}} v_{n+1} - \frac{(-1)^{2n+2} 3^{n+1}}{3^{n+2}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{3^{n+2}} v_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{3^{n+2}} v_{n+1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{u_n = \frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}} v_n}$$

EXERCICE 2

1.a. Les calculs donnent successivement :

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\\mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix} \text{ et } A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\\mathbf{3} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

Initialisation :
P_0 est vraie car on a :

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hérédité :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a, par hypothèse de récurrence :

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}}$$

b. A, étant une matrice triangulaire (inférieure), est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc **A est inversible si et seulement si $a \neq 0$**.

2.a. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$$

Initialisation :
P_0 est vraie car on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_0 & 1+u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0$$

Hérédité :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_{n+1} & 1+u_{n+1} \end{pmatrix}$$

On a, par hypothèse de récurrence :

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n & 1+u_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+2u_n & 2+2u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_{n+1} & 1+u_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n & 1+u_n \end{pmatrix}}$$

b. Par définition, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique ; on a :

$$k = 1+2k \Leftrightarrow k = -1$$

On définit donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_n - k = u_n + 1$$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ car, pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 1 + 2u_{n+1} + 1 = 2u_{n+1} + 2 = 2(u_{n+1} + 1) = 2v_n$$

Donc, pour tout entier naturel n, on a :

$$v_n = v_0 q^n = (u_0 + 1)2^n = 2^n$$

Soit, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n} = v_n - 1 = \mathbf{2^n - 1}$$

3.a. X étant une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1, une de ses densités f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition F de X est définie, pour tout réel x, par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

On a donc :

$$\begin{cases} \mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \mathbf{0} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt = 0 + \left[-e^{-t}\right]_0^x = \mathbf{1 - e^{-x}} & \mathbf{si\ x \geq 0} \end{cases}$$

b. Par définition de $P([Y=k])$, linéarité de la somme et changement d'indice, on a, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} P([Y=k]) = \sum_{k=0}^{n} P([k \leq X < k+1]) = \sum_{k=0}^{n} \left(F(k+1) - F(k)\right) = \sum_{k=0}^{n} F(k+1) - \sum_{k=0}^{n} F(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} F(k) - \sum_{k=0}^{n} F(k) = F(n+1) + \sum_{k=1}^{n} F(k) - \left(F(0) + \sum_{k=1}^{n} F(k)\right)$$

$$= F(n+1) - F(0) = 1 - e^{-n-1}$$

Il vient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P([Y=k]) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - e^{-n-1}\right) = 1$$

Car :

$$\lim_{n\to+\infty} (-n-1) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Ceci prouve que la série $\sum_{k\geq 0} P([Y=k])$ converge et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbf{Y}=\mathbf{k}])=\mathbf{1}$$

On a, **pour tout entier naturel k** :

$$\mathbf{p}(\mathbf{Y}=\mathbf{k})=\mathrm{P}([k \leq X<k+1])=F(k+1)-F(k)=1-e^{-k-1}-\left(1-e^{-k}\right)=\mathbf{e}^{-\mathbf{k}}-\mathbf{e}^{-\mathbf{k}-\mathbf{1}}$$

c. Puisque Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et que $Z=Y+1$, Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et on a, pour tout entier naturel k non nul :

$$p(Z=k)=p(Y+1=k)=p(Y=k-1)=e^{-(k-1)}-e^{-(k-1)-1}=e^{-k+1}-e^{-k}=e^{-k+1}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

Soit, pour tout entier naturel k non nul :

$$p(Z=k)=\left(1-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}=\left(1-\frac{1}{e}\right)\left(1-\left(1-\frac{1}{e}\right)\right)^{k-1}$$

On reconnaît que **Z suit la loi géométrique de paramètre $\mathbf{p}=\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}}$**.

D'après les formules du cours, l'espérance et la variance de Z sont :

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z})=\frac{1}{p}=\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{\frac{e-1}{e}}=\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e}-\mathbf{1}}$$

Et :

$$\mathbf{V}(\mathbf{Z})=\frac{1-p}{p^2}=\frac{1-\left(1-\frac{1}{e}\right)}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}=\frac{\frac{1}{e}}{\left(\frac{e-1}{e}\right)^2}=\frac{1}{e}\cdot\frac{e^2}{(1-e)^2}=\frac{\mathbf{e}}{(\mathbf{1}-\mathbf{e})^2}$$

Des formules $E(aZ+b)=aE(Z)+b$ et $V(aZ+b)=a^2V(Z)$, on déduit que l'espérance et la variance de Y sont :

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y})=E(Z-1)=E(Z)-1=\frac{e}{e-1}-1=\frac{e-(e-1)}{e-1}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}-\mathbf{1}}$$

Et :

$$\mathbf{V}(\mathbf{Y})=V(Z-1)=V(Z)=\frac{\mathbf{e}}{(\mathbf{1}-\mathbf{e})^2}$$

d. D'après la question 1.b, M est inversible si et seulement si $Y \neq 0$; **la probabilité que M soit inversible** est donc, d'après la question 3.b :

$$\mathbf{P}([\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}])=1-P([Y=0])=1-\left(1-e^{-1}\right)=\mathbf{e}^{-\mathbf{1}}$$

EXERCICE 3

Pour i entier naturel égal à 1 ou 2, définissons les trois événements :

$$U_i : \text{"la boule tirée provient de l'urne } \mathcal{U}_i \text{"}$$

$$V_i : \text{"la i-ème boule tirée est verte"} \quad \text{et} \quad R_i : \text{"la i-ème boule tirée est rouge"}$$

1.a. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{U_1, U_2\}$, il vient :

$$P([X_1=1])=P(R_1)=P(U_1 \cap R_1)+P(U_2 \cap R_1)=P(U_1)P_{U_1}(R_1)+P(U_2)P_{U_2}(R_1)$$

On a bien :

$$\mathbf{P}([\mathbf{X}_1=1])=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

D'après ce qui précède et puisque X_1 prend les valeurs 0 et 1, **X_1 suit la loi de Bernouilli de paramètre $p_1=\frac{2}{5}$**.

b. D'après les formules du cours, on a :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}_1)=p_1=\mathbf{\frac{2}{5}} \text{ et } \mathbf{V}(\mathbf{X}_1)=p_1(1-p_1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{6}{25}}$$

2.a. On a, puisque $Z=X_1+X_2$:

$$P([X_2=0]\cap[Z=0])=P([X_2=0]\cap[X_1=0])=P(V_1\cap V_2)=P(V_1)P_{V_1}(V_2)$$

On a, d'après la question 1.a :

$$P(V_1)=P([X_1=0])=1-P([X_1=1])=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

$P_{V_1}(V_2)$ est la probabilité de tirer une boule verte dans l'urne $\mathcal{U}_2$, donc :

$$P_{V_1}(V_2)=\frac{4}{5}$$

On a bien :

$$\mathbf{P}([\mathbf{X}_2=0]\cap[\mathbf{Z}=0])=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\mathbf{\frac{12}{25}}$$

b. Puisque $Z=X_1+X_2$ et que X_1 prend les valeurs 0 et 1, on a :

$$P([X_2=0]\cap[Z=2])=P([X_2=0]\cap[X_1=2])=P(\varnothing)=0$$
$$P([X_2=1]\cap[Z=0])=P([X_2=1]\cap[X_1=-1])=P(\varnothing)=0$$

On a, puisque $Z=X_1+X_2$:

$$P([X_2=0]\cap[Z=1])=P([X_2=0]\cap[X_1=1])=P(R_1\cap V_2)=P(R_1)P_{R_1}(V_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$
$$P([X_2=1]\cap[Z=1])=P([X_2=1]\cap[X_1=0])=P(V_1\cap R_2)=P(V_1)P_{V_1}(R_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$$
$$P([X_2=1]\cap[Z=2])=P([X_2=1]\cap[X_1=1])=P(R_1\cap R_2)=P(R_1)P_{R_1}(R_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$$

Le tableau donnant la loi de du couple (X_2,Z) est donc le suivant :

X_2 \ Z	**0**	**1**	**2**	**Loi de X_2**
0	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	0	$\frac{16}{25}$
1	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$
Loi de Z	$\frac{12}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{6}{25}$	

3.a. La loi de X_2 est une loi marginale du couple (X_2,Z), qui apparaît dans la dernière colonne du tableau donnant la loi du couple (X_2,Z) à la question 2.b; elle est donnée par le tableau ci-dessous :

k	**0**	**1**
$\mathbf{P([X_2=k])}$	$\mathbf{\frac{16}{25}}$	$\mathbf{\frac{9}{25}}$

X_2 suit la loi de Bernouilli de paramètre $p_2=\frac{9}{25}$, donc, d'après les formules du cours, on a :

$$\mathbf{E(X_2)}=p=\mathbf{\frac{9}{25}} \text{ et } \mathbf{V(X_2)}=p(1-p)=\frac{9}{25}\cdot\frac{16}{25}=\mathbf{\frac{144}{625}}$$

b. On a, par exemple :

$$P([X_1=0])P([X_2=0])=\frac{3}{5}\cdot\frac{16}{25}=\frac{48}{125}$$

Et, d'après la question 2.a :

$$P([X_1=0]\cap[X_2=0])=P([X_2=0]\cap[Z=0])=\frac{12}{25}=\frac{60}{125}$$

Donc **les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes**, car :

$$P([X_1=0]\cap[X_2=0])\neq P([X_1=0])P([X_2=0])$$

c. La loi de Z est l'autre loi marginale du couple (X_2,Z), qui apparaît dans la dernière ligne du tableau donnant la loi du couple (X_2,Z) à la question 2.b ; elle est donnée par le tableau ci-dessous :

k	**0**	**1**	**2**
$\mathbf{P([Z=k])}$	$\mathbf{\frac{12}{25}}$	$\mathbf{\frac{7}{25}}$	$\mathbf{\frac{6}{25}}$

d. Par linéarité de l'espérance, et d'après les questions 1.b et 3.a, on a :

$$\mathbf{E(Z)}=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\frac{2}{5}+\frac{9}{25}=\mathbf{\frac{19}{25}}$$

On déduit du tableau donnant la loi de Z que :

$$E(Z^2)=\frac{12}{25}\cdot 0^2+\frac{7}{25}\cdot 1^2+\frac{6}{25}\cdot 2^2=\frac{7+24}{25}=\frac{31}{25}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, il vient :

$$\mathbf{V(Z)}=E(Z^2)-(E(Z))^2=\frac{31}{25}-\left(\frac{19}{25}\right)^2=\frac{31\cdot 25-19^2}{25^2}=\frac{775-361}{625}=\mathbf{\frac{414}{625}}$$

4. La probabilité cherchée est :

$$\mathbf{P_{V_1}(U_1)}=\frac{P(U_1\cap V_1)}{P(V_1)}=\frac{P(U_1)P_{U_1}(V_1)}{P(V_1)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

5.a. D'après le tableau donnant la loi de probabilité du couple (X_2, Z) à la question 2.b, on a :

$$\mathbf{E(X_2Z)} = \frac{3}{25}\cdot 1\cdot 1 + \frac{6}{25}\cdot 1\cdot 2 = \frac{15}{25} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

b. On a :

$$\mathbf{Cov(X_2,Z)} = E(X_2Z) - E(X_2)E(Z) = \frac{3}{5} - \frac{9}{25}\cdot\frac{19}{25} = \frac{3\cdot 5\cdot 25 - 171}{625} = \frac{375-171}{625} = \mathbf{\frac{204}{625}}$$

c. On a :

$$\mathrm{Cov}(X_2,Z) = \mathrm{Cov}(X_2, X_1 + X_2) = \mathrm{Cov}(X_2,X_1) + \mathrm{Cov}(X_2,X_2) = \mathrm{Cov}(X_1,X_2) + V(X_2)$$

Donc:

$$\mathbf{Cov(X_1,X_2)} = \mathrm{Cov}(X_2,Z) - V(X_2) = \frac{204}{625} - \frac{144}{625} = \frac{60}{625} = \mathbf{\frac{12}{125}}$$

d. D'après le cours, on a :

$$V(Z) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$$

Soit :

$$\mathbf{V(Z)} = \frac{6}{25} + \frac{144}{625} + 2\cdot\frac{12}{125} = \frac{6\cdot 25 + 144 + 10\cdot 12}{625} = \frac{150+144+120}{625} = \mathbf{\frac{414}{625}}$$

EXERCICE 4

1. Dans cette question, on prend $a = 2$; f est donc définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. f est nulle sur $]-\infty, 1[$, donc **f est constante sur $]-\infty,1[$**.

On a, pour tout réel x supérieur ou égal à 1 :

$$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$$

Donc on a, pour tout réel x strictement supérieur à 1 :

$$f'(x) = 2(-3x^{-4}) = -\frac{6}{x^4} < 0$$

Donc **f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$**.

f n'est pas dérivable à gauche en 1, car on a :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{x-1} = +\infty$$

Puisque :

$$\lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0^-$$

Par contre, **f est dérivable à droite en 1**, et :

$$\mathbf{f'_d(1)} = -\frac{6}{1^4} = \mathbf{-6}$$

b. Il vient, d'après la question 1.a, pour tout réel x strictement supérieur à 1 :

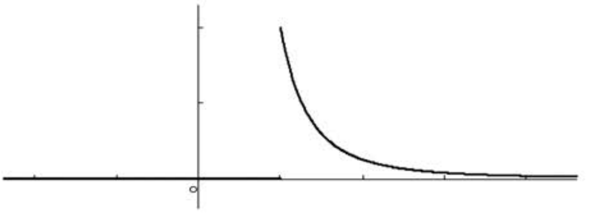
$$f'(x) = -6x^{-4}$$

On a donc, pour tout réel x strictement supérieur à 1 :

$$f''(x) = -6(-4x^{-5}) = \frac{24}{x^5} > 0$$

Donc **f est convexe sur** $[\mathbf{1,+\infty}[$.

c. L'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé est la suivante :



2.a. On a :

$$\mathbf{I(B)} = \int_1^B \frac{a}{x^{a+1}}dx = \int_1^B ax^{-a-1}dx = \left[\frac{a}{-a-1+1}x^{-a-1+1}\right]_1^B = \left[-\frac{1}{x^a}\right]_1^B \mathbf{= 1 - \frac{1}{B^a}}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{\mathbf{B\to+\infty}} \mathbf{I(B)} = \lim_{B\to+\infty}\left(1-\frac{1}{B^a}\right) \mathbf{= 1}$$

Car, a étant un réel strictement supérieur à 1, donc strictement positif, on a :

$$\lim_{B\to+\infty} B^a = +\infty$$

b. f est continue sur $]-\infty,1[$ comme fonction constante nulle, ainsi que sur $[1,+\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur cet intervalle ; f admet des limites finies à droite et à gauche en 1 car :

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} 0 = 0 \;\text{ et }\; \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) = a$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ car on a, puisque a est strictement positif :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^{a+1}} > 0 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 \geq 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a enfin, d'après la question 2.a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_1^{+\infty} \frac{a}{x^{a+1}}dx = 0 + \lim_{B\to+\infty} I(B) = 1$$

Donc **f peut être considérée comme une densité de probabilité**.

3.a. On a :

$$\mathbf{J(B)} = \int_1^B \frac{a}{x^a}dx = \int_1^B ax^{-a}dx = \left[\frac{a}{-a+1}x^{-a+1}\right]_1^B = \left[-\frac{a}{(a-1)x^{a-1}}\right]_1^B \mathbf{= \frac{a}{a-1} - \frac{a}{(a-1)B^{a-1}}}$$

b. Il résulte de la question 3.a que :

$$\lim_{B\to+\infty} J(B) = \lim_{B\to+\infty}\left(\frac{a}{a-1} - \frac{a}{(a-1)B^{a-1}}\right) = \frac{a}{a-1}$$

Car, a étant un réel strictement supérieur à 1, $a-1$ est strictement positif, donc on a :

$$\lim_{B\to+\infty} B^{a-1} = +\infty$$

Par définition, et sous réserve d'existence, on a :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{1} x\cdot 0dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot\frac{a}{x^{a+1}}dx=0+\int_{1}^{+\infty}\frac{a}{x^{a}}dx=\lim_{B\to+\infty} J(B)=\frac{a}{a-1}$$

Ainsi **X admet une espérance** $\mathbf{E(X)}$, et :

$$\mathbf{E(X)=\frac{a}{a-1}}$$

c. Par définition, et sous réserve d'existence, on a :

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{1} x^2\cdot 0dx+\int_{1}^{+\infty} x^2\cdot\frac{a}{x^{a+1}}dx=0+\int_{1}^{+\infty}\frac{a}{x^{a-1}}dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{a}{x^{a-1}}dx$$

Posons, pour tout réel B strictement supérieur à 1:

$$K(B)=\int_{1}^{B}\frac{a}{x^{a-1}}dx$$

On a :

$$K(B)=\int_{1}^{B} ax^{-a+1}dx=\left[\frac{a}{-a+1+1}x^{-a+1+1}\right]_1^B=\left[-\frac{a}{(a-2)x^{a-2}}\right]_1^B=\frac{a}{a-2}-\frac{a}{(a-2)B^{a-2}}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{B\to+\infty} K(B)=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{(a-2)B^{a-2}}\right)=\frac{a}{a-2}$$

Car, a étant un réel strictement supérieur à 2, $a-2$ est strictement positif, donc on a :

$$\lim_{B\to+\infty} B^{a-2}=+\infty$$

Donc $E(X^2)$ existe et:

$$E(X^2)=\int_{1}^{+\infty}\frac{a}{x^{a-1}}dx=\lim_{B\to+\infty} K(B)=\frac{a}{a-2}$$

Donc **X admet une variance** $\mathbf{V(X)}$ et on a, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V(X)}=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{a}{a-2}-\left(\frac{a}{a-1}\right)^2=\frac{a(a-1)^2-a^2(a-2)}{(a-2)(a-1)^2}$$

$$=\frac{a\left((a-1)^2-a(a-2)\right)}{(a-2)(a-1)^2}=\frac{a\left(a^2-2a+1-a^2+2a\right)}{(a-2)(a-1)^2}=\mathbf{\frac{a}{(a-2)(a-1)^2}}$$

4.a. Par définition de la fonction de répartition F de X, on a, pour tout réel x :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Compte-tenu de la définition de la densité f, et de la question 1.a, il vient :

$$\begin{cases}\mathbf{Si\ x<1}\quad \mathbf{F(x)}=\int_{-\infty}^{x} 0dt=\mathbf{0}\\ \mathbf{Si\ x\geq 1}\quad \mathbf{F(x)}=\int_{-\infty}^{1} 0dt+\int_{1}^{x}\frac{a}{t^{a+1}}dt=0+I(x)=\mathbf{1-\frac{1}{x^a}}\end{cases}$$

b. On a :

$$F(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^a}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x^a}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^a=2\Leftrightarrow a\ln x=\ln 2\Leftrightarrow x=e^{\frac{\ln 2}{a}}\Leftrightarrow x=2^{\frac{1}{a}}$$

La solution de l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ est donc $x=2^{\frac{1}{a}}$.

5.a. Par indépendance des n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$, on a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P([T_n > x]) &= P([X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]) \\ &= P([X_1 > x])P([X_2 > x])\ldots P([X_n > x]) \\ &= (1-P([X_1 \le x]))(1-P([X_2 \le x]))\ldots(1-P([X_n \le x])) \\ &= \underbrace{(1-F(x))(1-F(x))\ldots(1-F(x))}_{\text{n fois}} \\ &= (1-F(x))^n \end{aligned}$$

D'après la question 4.a, on a donc :

$$\begin{cases} \textbf{Si } x<1 & P([T_n > x]) = 1 \\ \textbf{Si } x \ge 1 & P([T_n > x]) = \dfrac{1}{x^{na}} \end{cases}$$

On a, pour tout réel x :

$$G_n(x) = P([T_n \le x]) = 1 - P([T_n > x])$$

Il vient donc :

$$\begin{cases} \textbf{Si } x<1 & G_n(x) = 0 \\ \textbf{Si } x \ge 1 & G_n(x) = 1 - \dfrac{1}{x^{na}} \end{cases}$$

b. D'après la question 4.a, on reconnaît que la fonction de répartition G_n de T_n est celle de la loi $\mathcal{L}$ de paramètre na, donc **T_n suit la loi $\mathcal{L}$ de paramètre na**.

Il résulte alors de la question 3.b que l'espérance $E(T_n)$ de T_n est :

$$\mathbf{E(T_n) = \frac{na}{na-1}}$$

6. Notons H_n la fonction de répartition de Z_n ; on a, pour tout réel x :

$$H_n(x) = P([Z_n \le x]) = P([\ln(T_n) \le x]) = P([T_n \le e^x]) = G_n(e^x)$$

On a :

$$e^x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 0$$

D'après la question 5.a, il vient donc, pour tout réel x :

$$H_n(x) = G_n(e^x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1-e^{-nax} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

On reconnaît que la fonction de répartition H_n de Z_n est celle de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = na$, **donc H_n suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = na$.**

L'espérance $E(Z_n)$ de Z_n est donc :

$$\mathbf{E(Z_n)} = \frac{1}{\lambda} = \mathbf{\frac{1}{an}}$$