emlyon business school

CORRIGÉ

MATHÉMATIQUES

SCIENTIFIQUE

CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur, à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer à l'ESSEC Business School.

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

1. • Vérifions que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Psi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Tout d'abord $\Psi_a(P)$ est bien un polynôme comme produit et somme de polynômes.

Puis, $d°(P') \leqslant n-1$, donc $d°((X-a)P') \leqslant 1+(n-1)$ i.e. $d°((X-a)P') \leqslant n$. Ainsi $d°(\Psi_a(P)) \leqslant \max(\underbrace{d°(2P)}_{\leqslant n}, \underbrace{d°((X-a)P')}_{\leqslant n})$ donc $d°(\Psi_a(P)) \leqslant n$.

• **Montrons que Ψ_a est linéaire**. Soit (α, β) un couple de réels et $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$.

On a :

$$\Psi_a(\alpha P+\beta Q) = 2(\alpha P+\beta Q)+(X-a)(\alpha P+\beta Q)' = \alpha 2P+\beta 2Q+(X-a)(\alpha P'+\beta Q')$$

d'où

$$\Psi_a(\alpha P+\beta Q) = \alpha 2P+\beta 2Q+\alpha(X-a)P'+\beta(X-a)Q' = \alpha\Psi_a(P)+\beta\Psi_a(Q)$$

On a ainsi prouvé que $\boxed{\Psi_a \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

---

2. Calculons $\Psi_a(X^k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

- $\Psi_a(1) = 2$.
- Si $k \in [\![1,n]\!]$, $\Psi_a(X^k) = 2X^k+(X-a)kX^{k-1} = (k+2)X^k - akX^{k-1}$.

On peut alors représenter la matrice demandée :

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Psi_a) = \begin{pmatrix} 2 & -a & & & (0) \\ & 3 & -2a & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & (0) & & \ddots & -na \\ & & & & n+2 \end{pmatrix}}$$

3. a. La matrice précédente est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux c'est à dire $2, 3, ..., n+2$.

On a donc $n+1$ valeurs propres pour une matrice carrée d'ordre $n+1$.On sait d'après le cours que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Psi_a)$ est diagonalisable, donc $\boxed{\Psi_a \text{ est diagonalisable}}$ et $\boxed{\text{ses valeurs propres sont } 2, 3, ..., n+2.}$

b. 0 n'est pas une valeur propre de Ψ_a d'où $\boxed{\Psi_a \text{ est un automorphisme}}$ puisque c'est un endomorphisme injectif en dimension finie.

c. On trouve immédiatement que $\boxed{\Psi_a(Q_0) = 2 = 2Q_0}$.

Si $k \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{\Psi_a(Q_k) = 2Q_k + (X-a)k(X-a)^{k-1} = (k+2)Q_k}$.

d. D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, Q_k est un vecteur propre de Ψ_a pour la valeur propre $k+2$.

Sachant que le nombre de valeurs propres est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

D'où $\boxed{Q_k \text{ est une base du sous-espace propre de } \Psi_a \text{ associé à la valeur propre } k+2}$.

4. a. En utilisant la formule donnant la dérivée d'un produit :

$$\boxed{((X-a)^2P(X))' = 2(X-a)P(X) + (X-a)^2P'(X) = (X-a)\Psi_a(P)}$$

b. Posons $Q = \Psi_a(P)$ et $R = (X-a)^2P(X)$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $R'(t) = (t-a)Q(t)$.

On a par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- si $x \neq a$, $\Phi_a(Q)(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x (t-a)Q(t)dt = \dfrac{1}{(x-a)^2}\int_a^x R'(t)dt = \dfrac{R(x)-R(a)}{(x-a)^2}$, d'où $\Phi_a(Q)(x) = P(x)$.
- Si $x = a$, $\Phi_a(Q)(a) = \dfrac{Q(a)}{2} = \dfrac{\Psi_a(P)(a)}{2}$, et $\Psi_a(P)(a) = 2P(a)$. Donc $\Phi_a(Q)(a) = P(a)$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi_a(\Psi_a(P))(x) = P(x)$ ce qui prouve que $\boxed{\Phi_a(\Psi_a(P)) = P}$.

c. Montrons pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Phi_a(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Puisque Ψ_a est bijective, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que $Q = \Psi_a(P)$ d'où $\Phi_a(Q) = \Phi_a(\Psi_a(P)) = P$.

D'où Φ_a est la fonction réciproque de Ψ_a puisqu'elle va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

On sait alors que $\boxed{\Psi_a \text{ est linéaire, bijective et que } \Phi_a^{-1} = \Psi_a}$.

d. La matrice de Φ_a dans la base $(Q_0, ..., Q_n)$ est l'inverse de la matrice de Ψ_a dans cette base, qui est diagonale, elle est donc diagonale.

D'où :

$$\boxed{\Phi_a \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les inverses de celle de } \Psi_a,\ \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n+2}.}$$

emlyon business school

CORRIGÉ

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

5. a. Par définition, h est la primitive de la fonction $t \mapsto tf(t)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{h \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R},\ h'(x) = xf(x).}$

---

b. La fonction f est continue sur le segment $[0, x]$ d'où elle y admet un maximum et un minimum.

Donc il existe $\alpha_x \in [0, x]$ et $\beta_x \in [0, x]$ tels que pour tout $t \in [0, x]$, $f(\alpha_x) \leqslant f(t) \leqslant f(\beta_x)$.

D'où, pour tout $t \in [0, x]$, $tf(\alpha_x) \leqslant tf(t) \leqslant tf(\beta_x)$. Il ne reste plus qu'à utiliser la croissance de l'intégration de 0 à x puisque $x \geqslant 0$:

$$\int_0^x tf(\alpha_x)dt \leqslant \int_0^x tf(t)dt \leqslant \int_0^x tf(\beta_x)dt$$

d'où $\boxed{f(\alpha_x)\int_0^x tdt \leqslant \int_0^x tf(t)dt \leqslant f(\beta_x)\int_0^x tdt.}$

---

c. Pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}$, d'où d'après la question précédente, pour tout $x > 0$:

$$f(\alpha_x)\frac{x^2}{2} \leqslant h(x) \leqslant f(\beta_x)\frac{x^2}{2}$$

d'où en divisant par x^2, $\dfrac{f(\alpha_x)}{2} \leqslant \dfrac{h(x)}{x^2} \leqslant \dfrac{f(\beta_x)}{2}$. Quand $x \to 0_+$, par encadrement $\alpha_x \to 0$ et $\beta_x \to 0$, ce qui donne par continuité de f en 0, $f(\alpha_x) \to f(0)$ et $f(\beta_x) \to f(0)$ quand $x \to 0_+$.

On applique alors le théorème des gendarmes pour conclure que $\boxed{\lim_{x\to 0_+} \dfrac{h(x)}{x^2} = \dfrac{f(0)}{2}.}$

---

d. Si $x < 0$, on raisonne de façon analogue aux questions b. et c. sur $[x, 0]$ pour obtenir α_x et β_x appartenant à $[x, 0]$ tels que :

$$\int_x^0 tf(\alpha_x)dt \leqslant \int_x^0 tf(t)dt \leqslant \int_x^0 tf(\beta_x)dt$$

En multipliant par -1,

$$\int_0^x tf(\beta_x)dt \leqslant \int_0^x tf(t)dt \leqslant \int_0^x tf(\alpha_x)dt$$

d'où,

$$f(\beta_x)\frac{x^2}{2} \leqslant h(x) \leqslant f(\alpha_x)\frac{x^2}{2}$$

d'où en divisant par x^2, $\dfrac{f(\beta_x)}{2} \leqslant \dfrac{h(x)}{x^2} \leqslant \dfrac{f(\alpha_x)}{2}$.

On conclut alors comme dans la question précédente.

---

6. • h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ce qui permet d'en déduire que $\boxed{\Phi(f) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*}$ et en particulier $\boxed{\text{elle est continue sur cet ensemble.}}$

• D'après les questions 5.c. et 5.d., $\lim_{x\to 0_+} \Phi(f)(x) = \lim_{x\to 0_-} \Phi(f)(x) = \Phi(f)(0)$, d'où

$$\boxed{\Phi(f) \text{ est aussi continue en } 0.}$$

MATHÉMATIQUES SCIENTIFIQUE

Pour tout $x \neq 0$, $\Phi(f)(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$, d'où

$$\Phi(f)'(x) = \frac{h'(x)x^2 - h(x)2x}{x^4} = \frac{f(x)x^3 - h(x)2x}{x^4} = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2\frac{h(x)}{x^2}\right) = \frac{1}{x}\left(f(x) - 2\Phi(f)(x)\right)$$

soit $\boxed{\text{l'égalité demandée.}}$

---

7. a. • Supposons que f est une fonction paire.

Montrons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\Phi(f)(-x) = \Phi(f)(x)$, ce qui prouvera que $\Phi(f)$ est une fonction paire.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $\Phi(f)(-x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{-x} tf(t)dt$. Réalisons le changement de variable $t = -u$ dans cette intégrale.

Ce changement de variable est bien de classe C^1 de $[0, x]$ dans $[0, -x]$ et $dt = (-1)du$.

D'où :

$$\frac{1}{x^2}\int_0^{-x} tf(t)dt = \frac{1}{x^2}\int_0^{x}(-u)f(-u)(-1)du = \frac{1}{x^2}\int_0^{x} uf(u)du = \Phi(f)(x)$$

donc $\Phi(f)(-x) = \Phi(f)(x)$ i.e. $\boxed{\Phi(f) \text{ est une fonction paire}}$.

• Si f est une fonction impaire, on procède de même pour établir que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\Phi(f)(-x) = -\Phi(f)(x)$.

Il reste à montrer que $\Phi(f)(0) = -\Phi(f)(0)$ i.e. $\Phi(f)(0) = 0$.

C'est évident puisque $\Phi(f)(0) = \dfrac{f(0)}{2} = 0$ car f est impaire.

$$\boxed{\Phi(f) \text{ est bien une fonction impaire.}}$$

---

b. Si f est une fonction positive, alors :

- $\Phi(f)(0) = \dfrac{f(0)}{2}$ est positive.
- si $x \neq 0$, d'après les doubles inégalités obtenues dans les questions 5.c. et 5.d., on peut affirmer que $\boxed{\Phi(f)(x) \geqslant 0.}$

---

8. a. D'après le résultat admis, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(g)(x) = 0$.

Or, pour tout $x \neq 0$,

$$\Phi(g)(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t(f(t) - \ell)dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x (tf(t) - \ell t)dt = \Phi(f)(x) - \frac{\ell}{x^2}\int_0^x tdt = \Phi(f)(x) - \frac{\ell}{2}$$

On peut en déduire que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(f)(x) = \dfrac{\ell}{2}.}$

---

b. D'après la question qui précède, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(h)(x) = \dfrac{\ell}{2}$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = \ell$.

Or, pour tout $x \neq 0$,

$$\Phi(h)(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x th(t)dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(-t)dt$$

On réalise à nouveau le changement de variable $t = -u$ qui donne :

$$\Phi(h)(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{-x}(-u)h(-u)(-1)du = \Phi(f)(-x)$$

D'où, pour tout $x \neq 0$, $\Phi(f)(x) = \Phi(h)(-x)$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(h)(-x) = \dfrac{\ell}{2}$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(f)(x) = \dfrac{\ell}{2}.}$

PARTIE C : Une application en probabilité

9. • Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [0, x]$, $0 \leqslant F(t) \leqslant F(x)$, car F est croissante sur $\mathbb{R}$, d'où $0 \leqslant tF(t) \leqslant tF(x)$.

On intègre de 0 à x :

$$0 \leqslant \int_0^x tF(t)dt \leqslant \int_0^x tF(x)dt \quad \text{i.e.} \quad 0 \leqslant \int_0^x tF(t)dt \leqslant F(x)\underbrace{\int_0^x tdt}_{=\frac{x^2}{2}}$$

d'où $0 \leqslant \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x tF(t)dt \leqslant F(x)$ i.e. $\boxed{0 \leqslant G(x) \leqslant F(x)}$.

• Soit $x < 0$. Pour tout $t \in [x, 0]$, $0 \leqslant F(x) \leqslant F(t)$, d'où $0 \geqslant tF(x) \geqslant tF(t)$. On intègre de x à 0 :

$$0 \geqslant \int_x^0 tF(x)dt \geqslant \int_x^0 tF(t)dt \quad \text{i.e.} \quad 0 \leqslant F(x)\underbrace{\int_0^x tdt}_{=\frac{x^2}{2}} \leqslant \int_0^x tF(t)dt$$

d'où $\boxed{0 \leqslant F(x) \leqslant G(x).}$

---

10. Il suffit d'appliquer la question 6 avec pour fonction f la fonction $2F$ qui est bien continue sur $\mathbb{R}$: $G = \Phi(2F)$. On peut ainsi affirmer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{G'(x) = \frac{1}{x}(2F(x) - 2G(x)) = \frac{2}{x}(F(x) - G(x)).}$$

---

11. Montrons que g vérifie les trois propriétés qui en font une densité de probabilité.

• D'après la question précédente, G' est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc

$$\boxed{g \text{ est bien continue sur } \mathbb{R} \text{ privé d'un nombre fini de points.}}$$

• D'après la question 9. , pour x non nul, $F(x) - G(x)$ a le même signe que x donc d'après la question 10., pour $x \neq 0$, $G'(x) \geqslant 0$. Ainsi pour tout $\boxed{x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0.}$

• Montrons que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1.

I est impropre en $-\infty$, 0 et $+\infty$. G est une primitive de g sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Or $G = \Phi(2F)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2F(x) = 2$ d'où d'après la question 8, $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$. G est continue en 0 d'après la question 5, d'où on peut en conclure $\displaystyle\int_{-\infty}^0 g(x)dx$ converge et vaut $G(0) - 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut $1 - G(0)$.

On peut en conclure que $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx \text{ converge et vaut } 1 - G(0) + G(0) = 1}$

On a bien établi que $\boxed{g \text{ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire } V.}$

De même, d'après la définition de g, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{x} g(t)dt = G(x) - 0 = G(x)$ ce qui prouve que

$$\boxed{G \text{ est la fonction de répartition de } V.}$$

---

12. a. • Il est évident que h_1 est à valeurs positives et est continue sur $\mathbb{R}^*$ (en fait sur $\mathbb{R}$).

• Il reste à montrer que $\int_0^{+\infty} h_1(x)dx$ converge et vaut 1, étant donné que h_1 est nulle sur $\mathbb{R}^-$.Cette intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$ et la fonction $K_1 : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x^2}$ est une primitive de h_1 sur $]0, +\infty[$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} K_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} K_1(x) = -1$, d'où

$$\int_0^{+\infty} h_1(x)dx \text{ converge et vaut } 0 - (-1) = 1$$

ce qui permet d'affirmer que $\boxed{h_1 \text{ est une densité de probabilité.}}$

---

b. X_1 admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} xh_1(x)dx$ est absolument convergente i.e. $\int_0^{+\infty} 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}dx$ est convergente.

D'après le cours, si $\sigma > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$ converge et vaut σ^2 puisque c'est le moment d'ordre 2 d'une loi normale $(0, \sigma^2)$. On choisit $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour obtenir $2\sigma^2 = 1$.

Par parité, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^2\mathrm{e}^{-x^2}dx$ converge et vaut $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, i.e. $\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2}dx$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. On peut alors en conclure que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} xh_1(x)dx \text{ est convergente et vaut } 2\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ i.e. } \mathbb{E}(X_1) \text{ existe et } \mathbb{E}(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

---

c. On obtient sans difficulté que $H_1(x) = 0$ si $x < 0$ et $H_1(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2}$ si $x \geqslant 0$.

• Il est alors immédiat que si $x < 0$, $\Phi(H_1)(x) = 0$ et $\Phi(H_1)(0) = H_1(0) = 0$.

• Si $x > 0$, $H_2(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x t(1 - \mathrm{e}^{-t^2})dt = \frac{2}{x^2}\left(\int_0^x tdt - \int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}dt\right)$, d'où :

$$\boxed{H_2(x) = \frac{2}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} - \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^x\right) = 1 - \frac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2}.}$$

La fonction H_2 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et si $x \neq 0$,

$$H_2'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{2x\mathrm{e}^{-x^2}x^2 - 2x(1-\mathrm{e}^{-x^2})}{x^4} = 2\dfrac{1-(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En posant $h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\dfrac{1-(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, on sait alors d'après le cours que

$$\boxed{h_2 \text{ est une densité de probabilité de } X_2.}$$

L'existence de $\mathbb{E}(X_2)$ est assurée par la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xh_2(x)dx$.

Or, cette intégrale est impropre en 0 et $+\infty$. On a :

$$h_2(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^3} \text{ d'où } xh_2(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

ce qui assure la convergence en $+\infty$ de l'intégrale précédente d'après le théorème de convergence par comparaison et les propriétés des intégrales de Riemann.

En 0, $\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$, d'où $1-(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2} = 1-(1+x^2)(1-x^2+o(x^2)) = o(x^2)$. Ainsi en 0, $h_2(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ d'où $xh_2(x) = o(1)$. L'intégrale étudiée est faussement impropre en 0, elle est convergente.

En conclusion, $\boxed{\mathbb{E}(X_2) \text{ existe.}}$

PARTIE D : Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

13. a. Pour tout couple de réels (x,y),

$|xy| = |x||y|$ et $\frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2)$, d'où $\frac{1}{2}(x^2+y^2) - |xy| = \frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2-2|x||y|) = \frac{1}{2}(|x|-|y|)^2$ d'après la célèbre identité remarquable. Donc

$$\boxed{|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

---

b. Si f et g appartiennent à E_2 alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}((f(x))^2+(g(x))^2)dx$ converge.

D'après la question précédente, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}((f(x))^2+(g(x))^2)$, donc par comparaison $\boxed{\int_0^{+\infty} |f(x)g(x)|dx \text{ converge.}}$

---

14. • La fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ appartient à E_2.

• Si $f \in E_2$, il est immédiat que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f \in E_2$.

• Soit f et g deux fonctions appartenant à E_2. Montrons que $f+g \in E_2$.

On a $((f+g)(x))^2 = (f(x))^2 + 2f(x)g(x) + (g(x))^2$. Par linéarité de l'absolue convergence, montrer que $(f+g) \in E_2$ revient à montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx$ est absolument convergente. C'est le 13.b.

On peut alors affirmer que $\boxed{E_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

---

15. Montrons que les propriétés du produit scalaire sont vérifiées par l'application $\langle .,. \rangle$.

• D'après la question 13.b. $\langle f,g \rangle$ est bien définie pour tout couple $(f,g) \in E_2^2$.

• La propriété de symétrie est vérifiée immédiatement.

• Soit $(f,g,h) \in E_2^3$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, montrons que : $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f,h \rangle + \beta \langle g,h \rangle$. Cela ne présente pas de difficulté.

• Soit f une fonction non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$. Montrons que $\langle f,f \rangle > 0$.

On a $\langle f,f \rangle >= \int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$. La fonction $x \mapsto (f(x))^2$ est positive sur $\mathbb{R}^+$, non identiquement nulle sur cet intervalle. D'après la propriété de stricte positivité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx > 0$.

On a bien établi que $\boxed{\text{l'application } \langle .,. \rangle \text{ définit un produit scalaire sur } E_2.}$

---

16. a. • D'après la question 5, $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$ d'où $\lim_{x\to 0} \left(\frac{h(x)}{x^2}\right)^2 = \left(\frac{f(0)}{2}\right)^2$ i.e. $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(h(x))^2}{x^4} = \frac{(f(0))^2}{4}.}$

• On a pour tout x non nul, $\frac{(h(x))^2}{x^3} = x\frac{(h(x))^2}{x^4}$, d'où on en déduit par produit de limite que $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(h(x))^2}{x^3} = 0.}$

b. Soit $X > 0$ et $0 < a < X$. Faisons une intégration par partie sur $\displaystyle\int_a^X \frac{(h(x))^2}{x^4}dx$ en posant, $u(x) = (h(x))^2$ et $v(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$. Ces fonctions sont de classe C^1 sur $[a, X]$ ce qui donne :

$$\int_a^X \frac{(h(x))^2}{x^4}dx = \left[-\frac{(h(x))^2}{3x^3}\right]_a^X + \int_a^X \frac{2h'(x)h(x)}{3x^3}dx = -\frac{(h(X))^2}{3X^3} + \frac{(h(a))^2}{3a^3} + \frac{2}{3}\int_a^X \frac{f(x)h(x)}{x^2}dx$$

i.e.

$$\int_a^X \frac{(h(x))^2}{x^4}dx = -\frac{(h(X))^2}{3X^3} + \frac{(h(a))^2}{3a^3} + \frac{2}{3}\int_a^X f(x)\Phi(f)(x)dx$$

Quand $a \to 0_+$, puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(h(x))^2}{x^4}$ est finie et $x \mapsto f(x)\Phi(f)(x)$ est continue en 0, $\displaystyle\int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4}dx$ converge, $\displaystyle\int_0^X \frac{f(x)\Phi(f)(x)}{x^2}dx$ converge et, de plus $\displaystyle\lim_{a\to 0_+}\frac{(h(a))^2}{3a^3} = 0$.

On peut passer à la limite quand $a \to 0_+$ dans l'égalité obtenue par intégration par parties :

$$\boxed{\int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4}dx = -\frac{(h(X))^2}{3X^3} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx}$$

---

c. Cette fonction polynomiale est positive par positivité de l'intégrale de 0 à X, $X > 0$. Or par développement du carré :

$$\int_0^X (\lambda f(x) + \Phi(f)(x))^2 dx = \lambda^2\int_0^X (f(x))^2dx + 2\lambda\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx + \int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx.$$

Cette fonction polynomiale est de degré inférieur à 2. Elle reste positive sur $\mathbb{R}$, donc elle ne peut pas être de degré 1.

Ainsi :

- soit elle est de degré inférieur à 0, d'où $\displaystyle\int_0^X (f(x))^2dx = 0$ et $\displaystyle\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx = 0$ et alors l'inégalité demandée est bien vérifiée.
- soit elle est de degré 2 et alors son discriminant est forcement négatif ou nul i.e. :

$$4\left(\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_0^X (f(x))^2dx\right)\left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx\right) \leqslant 0$$

i.e.

$$\left(\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_0^X (f(x))^2dx\right)\left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx\right)$$

en prenant la racine carrée des deux membres qui sont bien positifs :

$$\left|\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx\right| \leqslant \left(\int_0^X (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

donc $\boxed{\displaystyle\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx \leqslant \left(\int_0^X (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}}$

---

d. D'après la question 16.b., $\displaystyle\int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4}dx \leqslant \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx$. Et, $\displaystyle\int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4}dx = \int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx$ d'où

$$\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx \leqslant \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^X (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si $\displaystyle\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx = 0$ alors l'inégalité demandée est triviale.

Sinon, $\displaystyle\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx > 0$, on divise les membres de l'inégalité précédente par $\displaystyle\left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$, ce qui donne en particulier l'inégalité :

$$\boxed{\left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^X (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

---

e. Pour tout $X > 0$, $\displaystyle\int_0^X (f(x))^2dx \leqslant \int_0^{+\infty} (f(x))^2dx$ puisque $x \mapsto (f(x))^2$ est positive. Ainsi, pour tout $X > 0$, $\displaystyle\left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2}{3}\|f\|$ donc $\displaystyle\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx \leqslant \frac{4}{9}\|f\|^2$.

On a obtenu un majorant de $\displaystyle\int_0^X (\Phi(f)(x))^2dx$ qui ne dépend pas de $X > 0$. D'après le cours $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\Phi(f)(x))^2dx$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\Phi(f)(x))^2dx \leqslant \frac{4}{9}\|f\|^2$.

Ceci prouve que $\boxed{\Phi(f) \in E_2}$ et que $\|\Phi(f)\|^2 \leqslant \frac{4}{9}\|f\|^2$ i.e. $\boxed{\|\Phi(f)\| \leqslant \frac{2}{3}\|f\|.}$

---

f. Pour tout $X > 0$, on remarque que $X(\Phi(f)(X))^2 = \dfrac{(h(X))^2}{X^3}$. Les intégrales $\displaystyle\int_0^X \frac{h^2(x)}{x^4}dx$ et $\displaystyle\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)dx$ admettent des limites finies quand $X \to +\infty$ d'après les questions qui précèdent.

D'où $\boxed{\lim\limits_{X\to+\infty} X(\Phi(f)(X))^2 \text{ existe et est finie.}}$ Si cette limite est non nulle, notons la ℓ, alors en $+\infty$, $(\Phi(f)(X))^2 \sim \dfrac{\ell}{X}$. C'est incompatible avec la convergence $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\Phi(f)(x))^2dx$ d'après le théorème de convergence par comparaison et les propriétés des intégrales de Riemann. Finalement, $\boxed{\lim\limits_{X\to+\infty} X(\Phi(f)(X))^2 = 0.}$

---

g. On vient donc de montrer que $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(h(X))^2}{X^3} = 0$. D'où le passage à limite licite dans l'égalité du 16.b donne $\boxed{\|\Phi(f)\|^2 = \frac{2}{3}\langle\Phi(f), f\rangle.}$

PARTIE E : Étude d'une suite

17. Voici une version de la fonction demandée :

```
function v=suite_v(n)
v=0
for k=1:n
    v=v+k*suite_u(k)
end
v=v/(n*(n+1))
endfunction
```

18. a. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, minorée par 0 car positive. On sait d'après le cours qu'elle converge.

b. On conjecture que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers $\dfrac{\ell}{2}$ où ℓ est la limite de (u_n).

c. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $u_k \geqslant u_n$. D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} ku_n$ d'où $v_n \geqslant \dfrac{1}{n(n+1)}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)u_n$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, d'où $\boxed{v_n \geqslant \dfrac{u_n}{2}.}$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $v_{2n} = \dfrac{1}{2n(2n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} ku_k = \frac{1}{2n(2n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} ku_k + \sum_{k=n+1}^{2n} ku_k\right)$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k = n(n+1)v_n$ et par décroissance de la suite (u_n), $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} ku_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} ku_{n+1}$.

Mais $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} ku_{n+1} = \left(\sum_{k=n+1}^{2n} k\right)u_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n} k\right)u_{n+1}$ D'où,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} ku_k \leqslant \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right)u_{n+1} \text{ i.e. } \sum_{k=n+1}^{2n} ku_k \leqslant \frac{3n^2+n}{2}u_{n+1}$$

On peut donc en déduire que :

$$\boxed{v_{2n} \leqslant \frac{1}{2n(2n+1)}\left(n(n+1)v_n + \frac{3n^2+n}{2}u_{n+1}\right) \text{ i.e. } v_{2n} \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)}v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)}u_{n+1}}$$

d. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(n+2)v_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} ku_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} ku_k + \frac{1}{n+1}(n+1)u_{n+1}$, donc,

$$\boxed{(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}.}$$

D'où $\dfrac{n+2}{n}v_{n+1} = v_n + \dfrac{u_{n+1}}{n}$, et ainsi $v_n = \dfrac{n+2}{n}v_{n+1} - \dfrac{u_{n+1}}{n}$.

Alors,

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = v_{n+1} - \frac{n+2}{n} v_{n+1} + \frac{u_{n+1}}{n} = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1})}$$

---

e. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geqslant \frac{u_n}{2}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - 2v_{n+1} \leqslant 0$ donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ ce qui montre que $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

Elle est aussi à valeurs positives, donc convergente. Notons ℓ' sa limite.

Si $2\ell' \neq \ell$, alors $u_{n+1} - 2v_{n+1} \sim \ell - 2\ell'$ d'où $v_{n+1} - v_n \sim \frac{\ell - 2\ell'}{n}$ ie $v_n - v_{n+1} \sim \frac{2\ell' - \ell}{n}$.

Or c'est impossible ! En effet, la série positive de terme général $v_n - v_{n+1}$ est convergente puisque la suite de terme génral v_n l'est et que $\sum \frac{2\ell' - \ell}{n}$ est divergente.

On a donc $\boxed{2\ell' = \ell \text{ ce qui confirme la conjecture.}}$

---

19. a. Par définition, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k u_k \right) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant N} \frac{1}{n(n+1)} k u_k$$

Mais $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant N} \frac{1}{n(n+1)} k u_k = \sum_{k=1}^{N} k u_k \left(\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \right)$.

Or $\displaystyle\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}$ d'après le célèbre télescopage. D'où,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} k u_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right) = \sum_{k=1}^{N} u_k - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} k u_k$$

ce qui donne bien pour finir que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - N v_N.}$

---

b. De la question précédente, on déduit que pour tout $N \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \sum_{n=1}^{N} u_n$ donc que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ puisque (u_n) est à termes positifs. Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum v_n$ sont majorées indépendamment de N, donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ converge.}}$

---

c. Pour tout $N \geqslant 1$, $N v_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n - \sum_{n=1}^{N} v_n$. Or ces deux sommes ont une limite finie quand $N \to +\infty$, d'où $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} N v_N$ existe et est finie.

Notons ℓ la limite précédente. Si $\ell \neq 0$, alors $v_N \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{N}$, d'où la série de terme général v_n serait divergente ce qui n'est pas. On a donc bien $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to+\infty} N v_N = 0}$

---

d. On déduit immédiatement par passage à la limite dans l'égalité déjà obtenue, $Nv_N = \sum_{n=1}^{N} u_n - \sum_{n=1}^{N} v_n$, que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.}$

---

20. a. Pour répondre à la question il faut montrer que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k) \geqslant 0$ ce qui est immédiat.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k) \right)$ converge et vaut 1.

Il suffit d'appliquer la question 19 en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}(Y = n)$.

On a alors $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ qui converge et vaut 1 d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k \right)$ converge et vaut 1.

On peut alors affirmer que :

$$\boxed{\text{il existe une variable aléatoire discrète } Z \text{ à valeurs dans } \mathbb{N}^* \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k).}$$

---

b. Montrons d'abord que $\mathbb{E}(Y) \geqslant 1$. En effet, $Y \geqslant 1$ puisque Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. D'où par croissance de l'espérance $\mathbb{E}(Y) \geqslant 1$.

Ensuite, $\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k) \to \mathbb{E}(Y)$ quand $N \to +\infty$, d'où on peut en déduire que $\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k) \underset{+\infty}{\sim} \mathbb{E}(Y)$ puis pour finir que $\boxed{\mathbb{P}(Z = n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathbb{E}(Y)}{n^2}.}$

On a alors, $n\mathbb{P}(Z = n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathbb{E}(Y)}{n}$ ce qui par le théorème de convergence par comparaison et les propriétés des séries de Riemann, montre que $\boxed{Z \text{ n'admet pas d'espérance}}$.