CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, *external lecturer* à ESSEC Business School (jlroque@me.com).

Problème 1

Partie 1

1. Elle n'est pas inversible car sa première colonne est nulle. En revanche sa deuxième et sa troisième colonne forment ouvertement une famille libre — profondeurs différentes *for example* — et nul ne peut alors ignorer que

$$\mathtt{rg}\, A = 2.$$

2. C'est tout à fait *trigonalement* que nos yeux assénent

$$\mathtt{Spec}\, A = \{0, 2, 6\},$$

et notre matrice est *suffisamment*(*) diagonalisable car elle possède trois valeurs propres *différentes* alors que 3 est précisément son ordre.

↱ Lorsque n est un entier naturel non nul, nous avons pris l'habitude de qualifier de *stars* les matrices d'ordre n qui possèdent justement n valeurs propres distinctes. Ce qualificatif n'est pas du tout usurpé quand on a compris que ces matrices constituent le *nec plus ultra* de la gente des matrices diagonalisables d'ordre n. Il est d'ailleurs officiellement exigé de savoir que les sous-espaces propres des *stars* sont des droites vectorielles, c'est-à-dire des espaces vectoriels de dimension 1.

3. Le lecteur habile en résolution de systèmes trouvera aisément et sans aucun produit illicite que

$$\mathtt{E}_0(A) = \mathtt{Vect}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathtt{E}_2(A) = \mathtt{Vect}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathtt{E}_6(A) = \mathtt{Vect}\begin{bmatrix}1\\-6\\6\end{bmatrix},$$

en ayant bien entendu tenu compte de la consigne selon laquelle certaines *entries* doivent impérativement être égales à 1. Cela étant, et parce que nous maîtrisons la grande histoire de la diagonalisation et que nous respectons *toutes* les consignes, nous proposons

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & -6\\0 & 0 & 6\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix},$$

et tout le monde devrait y trouver son compte.

Partie 2

4. Nous devons y aller en deux temps.

▹ Soit P un élément de E. Vu les innombrables et officielles stabilités de l'environnement polynomial, nous pouvons tout d'abord affirmer que

$$X(X-1)P'$$

(*) C'est une gentille allusion à une très importante condition suffisante de diagonalisation.

est à coup sûr un polynôme réel et nous pouvons même ajouter que son degré ne devrait pas excéder $n+1$. Nous savons ensuite que la dérivation le ramenera docilement dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ et nous avons ainsi prouvé que T applique bien E dans E.

▹ Quant à la linéarité de T, nous nous autoriserons à dire tout bêtement qu'elle repose, essentiellement, sur celle de la dérivation.

↱ Nous sommes souvent étonnés de voir que, dans ce genre de sitations, d'aucuns traitent la linéarité, *avant* d'avoir prouvé le côté « application ». C'est quand même quelque part *a world upside down*… Pas vraiment sérieux tout cela !

5. Soit k appartenant à $[\![0,n]\!]$. La *polynomiale attitude*(*) impose une articulation en deux temps.

- ▹ Si $k=0$, on a $(X^k)'=0$ et il en résulte dans la foulée que $T(X^k)=0$.
- ▹ Si $k \geqslant 1$, nous avons cette fois $(X^k)'=kX^{k-1}$, et un calcul enfantin amène alors à

$$T(X^k)=k(k+1)X^k-k^2X^{k-1}.$$

Grâce à l'important protocole de « matricialisation » on parvient alors gentiment à

$$M=\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ & 2 & -4 & & & & \\ & & 6 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & -k^2 & & \\ & & & & k(k+1) & \ddots & \\ & & & & & \ddots & -n^2 \\ & & & & & & n(n+1) \end{bmatrix}$$

les éléments « oubliés » étant assurément nuls.

↱ Le texte a supposé $n \geqslant 2$, ce qui nous a permis de faire figurer au moins les trois premières colonnes de M. Si l'on avait autorisé les valeurs $n=0$ ou $n=1$, notre matrice eut été sérieusement rétrécie et l'on aurait trouvé $M=[\,0\,]$ dans le premier cas et

$$M=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dans le second.

6. La première colonne de M est nulle. La matrice M n'est donc pas inversible. Quant aux autres colonnes de M, elles sont *de visu* de *profondeurs* différentes et elles forment donc une famille libre. Nous devons alors impérativement clamer que

$$\operatorname{rg} M = n.$$

Il reste maintenant à ressortir le Gaffiot(**) du linéariste pour affirmer que T n'est pas bijectif et que

$$\operatorname{rg} T = n.$$

(*) C'est un comportement exemplaire qui consiste, par exemple, à ne pas écrire X^{k-1}, lorsque $k=0$…

(**) En hommage à un très célèbre latiniste, nous appelons ainsi le dictionnaire officiel qui permet de passer de la langue vectorielle à la langue matricielle et Lycée de Versailles.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 129 13/10/2017 11:34

Observons pour finir que le théorème de monsieur *durang* stipulant que

$$\dim \operatorname{Ker} T = \dim E - \operatorname{rg} T,$$

le noyau de T est une droite vectorielle qui, depuis une fort belle lurette, contient le polynôme 1. Autant dire alors que

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X].$$

7. La matrice M est trigonale supérieure et nos mirettes murmurent à l'oreille que

$$\operatorname{Spec} M = \{k(k+1) \mid k \in [\![0, n]\!]\}.$$

Un petit coup de Gaffiot plus loin, nous avons bien sûr également

$$\operatorname{Spec} T = \{k(k+1) \mid k \in [\![0, n]\!]\}.$$

Il suffit alors de se persuader que, lorsque l'entier k déambule dans $[\![0, n]\!]$, les nombres

$$k(k+1)$$

sont deux à deux distincts, et la très fameuse condition *suffisante* utilisée quelues lignes plus haut conduit à la diagonalisabilité de T.

↱ Avec notre langage très personnel et comme nous l'avons évoqué *supra*, l'endomorphisme T est une authentique *star* et tous ses sous-espaces propres sont donc des droites vectorielles. On retrouve ainsi, *via* une autre route, que

$$\dim \operatorname{Ker} T = 1,$$

puisque tout le monde sait que $\operatorname{Ker} T = \mathrm{E}_0(T)$.

Partie 3

8. On rappelle que pour gérer une problématique de produit scalaire on peut s'y prendre en quatre points ou en cinq points. Il va être commode ici de le faire en cinq. *Here we go !*

▷ Soit P et Q deux éléments de E. Les polynômes étant continus sur $\mathbb{R}$, le produit PQ est en particulier continu sur le *segment* $[0, 1]$ et son intégrale a alors tout à fait droit de cité. Ainsi, φ applique bien $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

▷ La symétrie de φ ne mérite rien de plus que *no comment* puisque la multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative.

▷ On fixe $Q \in E$. La linéarité de l'application

$$P \mapsto \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

repose avant tout sur celle de l'intégration, même si quelques arguments de distributivité doivent venir émailler l'affaire.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 130 13/10/2017 11:34

$\triangleright$ Soit $P \in E$. Nous avons

$$\varphi(P,P) = \int_0^1 P^2(x)dx,$$

et cette quantité est ouvertement positive ou nulle car c'est *carrément* le cas de P^2 et que l'intégration est croissante quand les bornes le veulent bien.

$\triangleright$ Soit pour finir P appartenant à E vérifiant $\varphi(P,P) = 0$. Cela s'écrit

$$\int_0^1 P^2(x)dx = 0,$$

et nous mettons alors en avant les réalités suivantes :

$\triangleright$ les bornes d'intégration sont *différentes* ;

$\triangleright$ la fonction intérieure — la fameuse intégrande — est continue et de signe constant sur $[0,1]$.

Nous sommes alors supposés savoir en déduire que

$$\forall x \in [0,1], \qquad P^2(x) = 0 \quad i.e. \quad P(x) = 0,$$

et comme le segment $[0,1]$ est un ensemble infini, le polynôme P possède une infinité de racines, ce qui ne lui présage pas un très grand avenir ! Bref,

$$P = 0,$$

et nous pouvons envisager la suite.

↱ Il y a de nombreux produits scalaires archi renommés sur les espaces de polynômes. Celui qui nous concerne est celui d'Adrien-Marie Legendre sur le segment $[0,1]$.

Autre chose, le texte garde dans toute la suite la notation φ pour le produit scalaire, au lieu de lui substituer une notation genre $<,>$, comme cela se pratique pourtant très souvent. On peut sûrement regretter ce choix.

9. Soit P et Q deux éléments de E. Nous avons

$$\varphi(T(P),Q) = \int_0^1 T(P)(x)Q(x)dx$$

et vu les origines *dérivatives* de $T(P)$ nous sommes quasiment contraints de nous intéresser aux deux applications

$$u : x \mapsto Q(x) \quad \text{et} \quad v : x \mapsto x(x-1)P'(x).$$

Elles sont, très polynomialement, de magnifique classe sur $\mathbb{R}$ et tout particulièrement de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ et l'on a

$$\forall x \in [0,1], \qquad u'(x) = Q'(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = T(P)(x).$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 131 13/10/2017 11:34

Au vu et au su du faciès de v, il est totalement indéniable que

$$\left[uv\right]_0^1 = 0,$$

et le théorème d'intégration *por partes* apporte alors sur un plateau l'égalité espérée qui peut plus élégamment s'écrire

$$\varphi\big(T(P), Q\big) = \int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)dx.$$

10. Soit à nouveau P et Q appartenant à E. D'après la précédente question nous avons déjà

$$\varphi\big(T(P), Q\big) = \int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)dx,$$

et grâce à un gentil *swap*(P, Q) et la symétrie du produit scalaire, nous revendiquons également

$$\varphi\big(P, T(Q)\big) = \int_0^1 x(1-x)Q'(x)P'(x)dx.$$

Il s'ensuit alors commutativement que

$$\varphi\big(T(P), Q\big) = \varphi\big(P, T(Q)\big),$$

chronique d'une symétrie attendue. On retrouve ainsi, mais *via* le théorème spectral, la diagonalisabilité de T. En revanche, cela ne permet pas de redémontrer son immense côté *star*…

11.*a*. Soit P appartenant à E. Grâce à l'élégante égalité mise en place à la question 9, nous avons

$$\varphi\big(T(P), P\big) = \int_0^1 x(1-x)\big(P'(x)\big)^2 dx,$$

et il suffit d'utiliser la même argumentation que celle développée au quatrième point de la question 8, après avoir *carrément* observé que

$$\forall x \in [0,1], \qquad x(1-x)\big(P'(x)\big)^2 \geqslant 0.$$

b. Nous nous y prenons en deux temps.

▷ Soit P appartenant à E vérifiant

$$\varphi\big(T(P), P\big) = 0.$$

Cela s'écrit

$$\int_0^1 x(1-x)\big(P'(x)\big)^2 dx = 0,$$

et en utilisant la même rhétorique qu'au cinquième point de la 8, nous parvenons cette fois à

$$\forall x \in [0,1], \qquad x(1-x)\big(P'(x)\big)^2,$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 132 13/10/2017 11:34

et autant dire alors que, pour tous les réels x de l'*ouvert* $]0,1[$, nous avons $P'(x) = 0$. Seulement voilà, l'ouvert $]0,1[$ est un ensemble tout aussi infini que son cousin segment et c'est exactement comme *supra* que nous assénons que

$$P' = 0.$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, il doit naturellement s'ensuivre que P est un polynôme constant.

▷ Supposons, réciproquement, que P soit un polynôme constant, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{R}_0[X]$. La *kernly* question 6 oblige $T(P) = 0$ et l'on a *a fortiori*

$$\varphi\big(T(P), P\big) = 0.$$

Bref, les polynômes recherchés sont *exactement* les polynômes constants, c'est-à-dire les éléments de $\mathbb{R}_0[X]$.

Partie 4

12. C'est à la surprise générale que l'on découvre que

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(T) = A,$$

où A a été apercue lors de la première partie.

↱ D'aucuns pourraient être complètement défaits de trouver, pour l'endomorphisme *symétrique* T, une matrice qui n'est absolument pas symétrique ! Cependant et quand on domine son cours, il n'y a aucun péril en la demeure. Cet état de chose démontre simplement que la base $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormale pour le produit scalaire φ, et puis c'est tout !

13. La question 3 de la première partie s'est chargée de mettre en avant les éléments propres de la *matrice* A, en l'occurrence

$$\mathsf{Spec}\, A = \{0, 2, 6\},$$

$$\mathsf{E}_0(A) = \mathsf{Vect}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathsf{E}_2(A) = \mathsf{Vect}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathsf{E}_6(A) = \mathsf{Vect}\begin{bmatrix}1\\-6\\6\end{bmatrix},$$

et grâce à un petit coup de Gaffiot, nous en déduisons ceux de l'*endomorphisme* T à savoir

$$\mathsf{Spec}\, T = \{0, 2, 6\},$$

$$\mathsf{E}_0(T) = \mathsf{Vect}\,(1) \quad ; \quad \mathsf{E}_2(T) = \mathsf{Vect}\,(1-2X) \quad ; \quad \mathsf{E}_6(T) = \mathsf{Vect}\,(1-6X+6X^2),$$

le spectre ayant été également et par ailleurs obtenu lors de la question 7.

Les *pros* de la fabrication de bases *orthonormales propres* pour les endomorphismes symétriques connaissent *farpaitement* la musique. Il faut uniquement

▷ obtenir des bases orthonormales de chacun des sous-espaces propres par le biais, la plupart du temps, du fameux procédé de Jorgen Gram et Ehrard Schmidt ;

▷ concaténer tout cela en tenant compte des consignes, si consignes il y a.

Here we go !

▷ Les sous-espaces propres étant ici de dimension 1, les *Gram Schmidt process* permettant d'obtenir des bases orthonormales sont réduits à peau de chagrin ! Il suffit en effet de procéder à de toutes bêtes divisions par la norme correspondante. *As usual*, nous noterons $\| \ \|$ la norme euclidienne attachée au produits scalaire φ et nous avons donc

$$\|1\|^2 = \int_0^1 dx,$$

et

$$\|1-2X\|^2 = \int_0^1 (1-2x)^2 dx \quad ; \quad \|1-6X+6X^2\|^2 = \int_0^1 (1-6x+6x^2)^2 dx.$$

Des calculs genre « amie de la poésie bonsoir ! » conduisent alors à

$$\|1\|^2 = 1 \quad ; \quad \|1-2X\|^2 = \frac{1}{3} \quad ; \quad \|1-6X+6X^2\|^2 = \frac{1}{5},$$

et nous avons pour bases orthonormales respectives de nos espaces propres les familles

$$(1) \quad ; \quad \left(\sqrt{3}(1-2X)\right) \quad ; \quad \left(\sqrt{5}(1-6X+6X^2)\right).$$

▷ la concaténation qui respecte la consigne de croissance, produit alors la base orthonormale

$$\mathscr{C} = \left(1, \sqrt{3}(1-2X), \sqrt{5}(1-6X+6X^2)\right),$$

qui devrait satisfaire *everybody*.

14. Nous ne sommes évidemment pas surpris par l'égalité

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

et comme nous maîtrisons habilement la *diagonalitude*, nous sommes pratiquement contraints de définir matriciellement notre endomorphisme V par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(V) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Il est en effet tout à fait évident que $V^2 = T$ et nous ajoutons que $\mathscr{C}$ étant orthonormale, notre nouveau venu V est un endomorphisme symétrique de E puisque les matrices diagonales réelles sont évidemment symétriques réelles et qu'il existe sur le marché une fondamentale caractérisation matricielle de la symétrie.

Soit alors pour finir un élément P de E et notons

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{1}$$

la liste de ses coordonnées dans notre base orthonormale. Ce n'est qu'une matricielle formalité que de déduire que la liste des coordonnées de $V(P)$, toujours dans la même base, est

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\,b \\ \sqrt{6}\,c \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Maintenant, et au risque de fortement radoter, nous insistons *adonf* sur l'orthonormalité de $\mathscr{C}$ qui permet de mettre en exergue l'*awesome* propriété « produit scalaire en base orthonormale ». Cette dernière affirme que le produit scalaire

$$\varphi\big(V(P), P\big)$$

est exactement le produit scalaire *canonique* des deux colonnes (1) et (2) *supra*, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\,b \\ \sqrt{6}\,c \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,b^2 + \sqrt{6}\,c^2,$$

dont la positivité n'aura échappé à personne. Il semble alors bien que notre contrat soit rempli.

↱ Un endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien $(\mathcal{E}, < , >)$ vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{E}, \qquad < u(x)\,,\, x > \geqslant 0,$$

est appelé endomorphisme symétrique *positif* et c'est d'ailleurs une notion importante quasiment à la limite du programme officiel. On note parfois

$$\mathcal{L}_s^+(\mathcal{E})$$

l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E}$ est maintenant un espace vectoriel quelconque et si u est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, on appelle assez naturellement « racine carrée » de u, tout endomorphisme r de $\mathcal{E}$, vérifiant

$$r^2 = u.$$

On démontre alors — c'est un exercice très classique — *the square root theorem* selon lequel

$$\forall u \in \mathcal{L}_s^+(\mathcal{E}), \quad \exists\,!\, r \in \mathcal{L}_s^+(\mathcal{E}), \qquad r^2 = u,$$

ce qui, en français, signifie que tout endomorphisme symétrique positif u possède une *unique* racine carrée symétrique positive r.

Mettons-nous bien d'accord, l'endomorphisme u peut posséder une palanquée de racines carrées, mais, parmi les endomorphismes symétriques positifs, il en possède une et une seule et elle est internationalement notée

$$u^{1/2}.$$

Forts de toutes ces informations, il semble que le texte nous ait fait découvrir un endomorphisme V qui n'est autre que

$$V = T^{1/2}.$$

La partie « existence » de V a été parfaitement couverte, mais on peut sûrement regretter que la partie « unicité » ait été complètement occultée. Une autre fois peut-être…

Problème 2

Partie 1

1. Soit x un élément de I. Comme nous maîtrisons toutes les finesses(*) concernant les fameuses fonctions « puissance », et comme

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad 1 + t^2 > 0,$$

nous clamons la continuité sur $[0, +\infty[$ de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x},$$

à telle enseigne que l'intégrale définissant $H(x)$ n'est impropre qu'en plus l'infini. Mais il est indéniable que

$$\frac{1}{(1+t^2)^x} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2x}} \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 1, \quad \frac{1}{t^{2x}} \geqslant 0.$$

Comme x appartient à I, nous avons $2x > 1$, ce qui assure une paisible existence à la référence riemannienne

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}},$$

et, par équivalence en signe positif, il devrait en être de même de la cousine

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x}.$$

L'intégrande de cette dernière étant, depuis longtemps, continue sur $[0, +\infty[$, un important *théorème* de Michel Chasles — *cf.* la première remarque *infra* — assure que les deux intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x}$$

(*) Et Dieu sait s'il y en a !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 136 13/10/2017 11:34

sont de même nature et nous pouvons donc envisager la suite.

↱ D'aucuns invoquent à cet endroit la *relation* de Chasles ! Il est totalement impossible qu'elle fasse le job puisque c'est une simple égalité qui n'a jamais eu vocation à *prouver* des existences d'intégrales. En revanche le *théorème* de Chasles auquel nous faisons allusion, *démontre* que, sous certaines conditions, quelques intégrales sont de même nature, et est donc profondément au cœur du débat.

↱ Conformément à la requette du texte, nous avons établi que H est au moins définie sur l'intervalle I. Le lecteur malin pourra vérifier que la preuve que nous venons de donner n'est pas loin de révéler qu'en réalité

$$\operatorname{def} H = I.$$

2. Soit x et y deux éléments de I vérifiant $x < y$, et t un élément de $[0, +\infty[$. Comme

$$\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1,$$

les *pros* de l'exponentiation doivent savoir en déduire que

$$\frac{1}{(1+t^2)^y} \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^x},$$

et l'on en déduit immédiatement que

$$H(y) \leqslant H(x),$$

puisque l'intégration est croissante lorsque les bornes le veulent bien.

3.a. Vu la position géographique de 1 par rapport à sa montié, on a sans autre explication

$$H(1) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

b. Comme n et $n+1$ appartiennent à I la situation est sous contrôle et la linéarité de l'intégration amène tout d'abord en douceur à

$$2n\big(H(n) - H(n+1)\big) = 2n \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt.$$

Nous observons alors que les deux fonctions

$$u : t \mapsto t \quad \text{et} \quad v : t \mapsto -\frac{1}{(1+t^2)^n}$$

sont assurément et *rationnellement* de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{2n\,t}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

En outre et parce que n n'est pas nul, le produit uv a la limite finie 0 en plus l'infini. Comme l'on a également $uv(0) = u(0)v(0) = 0$, le théorème d'intégration impropre *by parts* stipule que

$$2n\big(H(n) - H(n+1)\big) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

ce qui n'est pas du tout pour nous déplaire.

↱ Contre toute attente, nous sommes depuis un certain temps au XXI^e siècle, mais le théorème d'intégration impropre par parties n'est toujours pas au programme de nos classes. Le lecteur obéissant devra donc rédiger cette intégration

▷ en annonçant *first* un réel $A > 0$;

▷ en procédant à une intégration par parties *propre* sur le segment $[0, A]$ *via* les mêmes fonctions u et v que celles que nous avons sélectionné *supra* ;

▷ en légitimant pour finir la possibilité de passer à la limite lorsque A tend vers plus l'infini.

Il reste alors à redire pour la 6174*ième* fois que n n'est pas nul et que par conséquent et tout à fait mentalement

$$H(n+1) = \frac{2n-1}{2n} H(n).$$

c. Voilà notre proposition.

```
n = input (' Entrer une valeur de n : ')
  H = %pi/2
  for i = 1 : n − 1
     H = (2 ∗ i − 1) ∗ H/(2 ∗ i) ;
  end
disp ('And the winner is ') ; disp (H)
```

d. Une récurrence de Cotonou et un *nanochouia* d'habileté calculatoire viennent à bout de l'affaire. Nous laissons au lecteur méfiant, le soin d'en rédiger les détails.

Partie 2

4.*a*. La fonction φ est à n'en pas douter de classe(*) $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et nous avons immédiatement

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(u) = e^u + e^{-u},$$

et il en résulte *de visu* que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(u) > 0.$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, notre application φ est désormais *strictement* croissante sur $\mathbb{R}$ et c'est déjà une excellente nouvelle. Comme elle y est continue et que, sans aucune indétermination, nous avons

$$\varphi(u) \xrightarrow[u \to -\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad \varphi(u) \xrightarrow[u \to +\infty]{} +\infty,$$

(*) Nous n'avons pas lésiné sur la classe de φ car, comme le signale la maxime de Duracell, qui peut le plus, peut le moins. Nous n'utiliserons cependant que sa dérivabilité en question a et sa classe $\mathcal{C}^1$ en question b.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 138 13/10/2017 11:34

elle réalise effectivement une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, car il existe sur le marché un important théorème de la bijection strictement monotone.

Comme

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u \to +\infty} \varphi(u) = +\infty,$$

il suffit de se mettre la tête à l'envers pour asséner tranquillement que

$$\varphi^{-1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} \varphi^{-1}(t) = +\infty,$$

↱ Il y a ici un gros parfum de trigonométrie hyperbolique.

Dans la littérature, la fonction φ est appelée « sinus hyperbolique » et son international logo est « sinh » et sa dérivée φ' est son compère « cosinus hyperbolique » ayant pour logo « cosh ». Il est à noter que le formulaire de trigonométrie hyperbolique est *presque* un copier-coller de celui de trigonométrie classique — dite trigonométrie circulaire — et ce n'est pas vraiment étonnant car, si l'on en croit les formules de Leonhard, nous avons

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \cosh(iu) = \cos u \quad \text{et} \quad \sinh(iu) = i \sin u.$$

b. Soit x appartenant à I. Vu ce qui vient d'être narré à l'instant, on déduit aisément que la fonction

$$u \mapsto \varphi(u)$$

réalise une bijection croissante de $[0, +\infty[$ sur lui-même et selon l'important théorème de changement de variable, nous déduisons que

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(u)}{\left(1 + \varphi^2(u)\right)^x}\, du.$$

Nous avons déjà observé que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

et il est très facile de parvenir — c'est la formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique — à l'égalité

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1,$$

qui se décline ainsi en

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad 1 + \varphi^2(u) = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2.$$

Quelques simplifications tranquilles et un *nanochouia* de linéarité conduisent alors au résultat souhaité, que nous préférons écrire

$$H(x) = 2^{2x-1} \int_0^{+\infty} (e^u + e^{-u})^{1-2x} du.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 139 13/10/2017 11:34

5.a. Soit u un réel *positif* ou nul. Après avoir mis en avant la désopilante banalité

$$0 \leqslant e^{-u} \leqslant e^{u},$$

nous pouvons passer à la question suivante.

b. Soit x appartenant à I et u appartenant à $\mathbb{R}_+$. Comme $1-2x$ est négatif, il résulte aisément de la précédente que

$$2^{1-2x}e^{-(2x-1)u} \leqslant (e^{u}+e^{-u})^{1-2x} \leqslant e^{-(2x-1)u},$$

qui se transforme positivement et opérationnellement en

$$e^{-(2x-1)u} \leqslant 2^{2x-1}(e^{u}+e^{-u})^{1-2x} \leqslant 2^{2x-1}e^{-(2x-1)u}.$$

Vu qu'en réalité $2x-1$ est *strictement* positif, il est bien connu que la référence exponentielle

$$\int_0^{+\infty} e^{-(2x-1)u}du$$

mène une paisible existence et vérifie l'égalité

$$\int_0^{+\infty} e^{-(2x-1)u}du = \frac{1}{2x-1}.$$

L'encadrement mis en place quelques lignes plus haut, la croissance de l'intégration — les bornes n'y sont pas opposées ! — et un *picochouia* de linéarité permettent alors de conclure tranquillement l'affaire.

6. Il est tout d'abord évident que

$$\frac{1}{2x-1} \xrightarrow[\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}]{} +\infty,$$

et vu la partie gauche de l'encadrement de la toute récente question b, c'est *by squeeze* à l'infini que nous assénons que

$$H(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}]{} +\infty.$$

Notons ensuite que

$$2^{2x-1} \xrightarrow[\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}]{} 1,$$

de sorte que, quasi mentalement

$$H(x) \underset{\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}}{\sim} \frac{1}{2x-1}.$$

Partie 3

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 140 13/10/2017 11:34

7.a. Il y a sûrement bien des manières d'aborder une telle question. Nous optons pour un argument de concavité. La fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ est concave sur l'intervalle $[0,1]$ puisqu'elle y est ouvertement de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa dérivée, en l'occurrence,

$$u \mapsto \frac{1}{1+u},$$

y est assurément décroissante. Comme l'équation de la corde tendue entre les points d'abscisses 0 et 1 a une équation qui devrait rappeler de bons souvenirs aux potaches de la fin du collège, nous nous permettons d'en déduire que

$$\forall u \in [0,1], \qquad \ln(1+u) \geqslant \ln 2\, u,$$

et comme nul ne peut ignorer que

$$\ln 2 \geqslant \frac{1}{2},$$

nous pouvons savourer notre plaisir en signalant, cependant, que la positivité de certains protagonistes a été fortement appréciée.

b. Il est *normalement* recommandé de savoir que, tout réel *strictement* positif σ, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt$$

existe et vaut $\sigma\sqrt{2\pi}$. Un joli argument de parité fait alors que sa moitié de copine

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt$$

existe également et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit alors $x \in I$. Ce dernier étant *strictement* positif, le choix

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

semble parfaitement judicieux et nous revendiquons ainsi l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2}\,dt.$$

ainsi que la valeur

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

c. Soit x appartenant à I et t appartenant au segment $[0,1]$. Comme c'est aussi le cas de t^2, il résulte du récent a légèrement exponentié que

$$1 + t^2 \geqslant e^{t^2/2},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 141 13/10/2017 11:34

et l'élévation à la puissance *négative* $-x$ devrait nous déposer en douceur sur

$$0 \leqslant (1+t^2)^{-x} \leqslant e^{-xt^2/2},$$

la positivité ajoutée sur le côté gauche, ne pouvant troubler que certains neurasthéniques chroniques. La croissance de l'intégration — encore elle ! — assure alors que

$$0 \leqslant \int_0^1 (1+t^2)^{-x} dx \leqslant \int_0^1 e^{-xt^2/2} dt,$$

puisque les bornes l'ont bien voulu, et il reste à évoquer la positivité d'une certaine intégrande stipulant que

$$\int_0^1 e^{-xt^2/2} dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2} dt,$$

pour que le récent b se charge de conclure l'affaire.

d. Soit à nouveau x appartenant à I. Étant très bien entendu que

$$\forall t \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2},$$

et que $2x-1$ est positif, nous revendiquons

$$\forall t \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^x} \leqslant \frac{1}{t^{2x}},$$

et comme la référence riemannienne

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}},$$

a déjà eu l'occasion de faire parler de son existence, c'est par le sempiternel argument de croissance déjà utilisé mille fois que

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}}.$$

Le lecteur rompu aux références intégrales et à leurs valeurs — quand elles existent s'entend ! — n'oserons pas contredire l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}} = \frac{1}{2x-1},$$

et nous pouvons donc passer à la question suivante.

e. Soit $x \in I$. Il résulte des deux dernières question et de la relation de Chasles que

$$0 \leqslant H(x) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + \frac{1}{2x-1},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 142 13/10/2017 11:34

et c'est grâce à un très gentil *squeezing process* que l'on parvient à

$$H(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons avant de commencer que la question 3.d de la première partie suffit à mettre en lumière l'indispensable *stricte* positivité de $H(n)$, sans laquelle son logarithme… Tout est donc sous contrôle.

a. Soit derechef $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce à la question 3.b et à notre passage sur les bancs de la terminale scientifique, nous avons

$$u_{n+1} - u_n = \ln\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big) + \frac{1}{2}\ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big),$$

et le développement limité officiel au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2),$$

permet d'en déduire en un tournemain que

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{8n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Seulement voilà, cette dernière assertion est exactement la *définition* de l'équivalence

$$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{8n^2}.$$

b. Nous mettons en avant l'équivalence obtenue à l'instant, la convergence de la série de Riemann de paramètre 2 ainsi que le crucial argument de signe

$$\forall n \geqslant 1, \qquad -\frac{3}{8n^2} \leqslant 0.$$

Tout cela devrait satisfaire tout le monde, puisqu'il existe sur le marché un important test d'équivalence en signe (localement) négatif, un argument de *picolinearity* — pour la gestion de la constante $-3/8$ — ayant cependant participé aux rouages de la machine.

c. Nul ne peut officiellement ignorer la géniale « *passerelle suite-série* » selon laquelle la *suite* (u_n) et la *série*

$$\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n),$$

sont de même nature. Il ressort alors du récent b que la suite (u_n) est convergente et nous nous empressons de noter ℓ sa limite. La légendaire continuité de l'exponentielle stipule dans la foulée que

$$e^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell},$$

ce qui, après notre passage sur les bancs de la fin du lycée, se métamorphose en

$$H(n)\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell}.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 143 13/10/2017 11:34

Comme le réel e^ℓ n'est pas nul, cette dernière « flèche » de limite se transforme en l'équivalence

$$H(n)\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^\ell,$$

et il reste à proposer

$$K = e^\ell,$$

en insistant fortement sur sa criante positivité stricte.

9. Il s'agit d'une de ses parfois délicates problématiques de passages de propriétés concernant des *integers* à des propriétés analogues portant sur des *reals* dans lesquelles le concept de « partie entière » est souvent fortement sollicité.

Soit donc x un réel, que nous supposons confortablement supérieur ou égal à 1 et profitons-en pour noter

$$n_x = \lfloor x \rfloor.$$

Étant donné que, nous avons *entièrement*

$$1 \leqslant n_x \leqslant x \leqslant n_x + 1,$$

et que H est décroissante sur I, nous avançons tranquillement que

$$H(n_x+1) \leqslant H(x) \leqslant H(n_x),$$

et comme à l'évidence

$$n_x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

la précédente question, profitant du caractère *integer* de n_x, ne laisse aucune place au doute. Nous devons avoir tout d'abord

$$H(n_x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n_x}} \quad \text{et} \quad H(n_x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n_x+1}}. \tag{EQ}$$

Seulement voilà, comme nul ne s'opposera à l'équivalence

$$n_x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} n_x,$$

et qu'il est officiellement indéniable que

$$\lfloor u \rfloor \underset{u\to+\infty}{\sim} u,$$

nous pouvons très largement améliorer les deux équivalences (EQ) en les transformant en

$$H(n_x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad H(n_x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}},$$

puisque l'équivalence est, entre autres, légendairement compatible avec les *légales* élévations à la puissance $1/2$. Les deux extrêmes de l'encadrement *supra*

$$H(n_x+1) \leqslant H(x) \leqslant H(n_x),$$

ont donc le même équivalent et c'est par un *squeeze* d'équivalence, que le lecteur justifiera sans peine, que nous assénons

$$H(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}.$$

↱ La fonction H a des liens très étroits avec la célèbre fonction W de John Wallis facilement définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\forall x > -1, \qquad W(x) = \int_0^{\pi/2} \cos^x u \, du,$$

et qui avait déjà fait parler d'elle dans le sujet de la même école de l'année 1996.

Soit en effet x appartenant à I. Le lecteur pugnace constatera que, *via* le changement de variable $t = \tan u$, effectué sur l'intégrale $H(x)$, il s'avère que

$$H(x) = W(2x-2),$$

le réel $2x-2$ étant, fort heureusement, strictement supérieur à -1. Dans ces conditions, les habitués de la sphère *wallisienne* ne doivent pas être surpris par les résultats de la première partie et pire, ils se doivent de connaître la vraie valeur de la constante K, qui se trouve, en réalité, être la magnifique

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Avis aux amateurs !

Partie 4

10. La fonction f est parfaitement définie sur $\mathbb{R}$, elle y est ouvertement à valeurs positives ou nulles, elle n'a manifestement qu'une seule discontinuité et nous avons déjà signalé que $H(1)$ existe et que

$$H(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Quod quaeris !

11.*a*. Soit x un nombre réel. Une gentille gestion des facettes de l'application f conduit *caïman* mentalement à

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan} x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

b. Étant donné que

$$\frac{t}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t},$$

EM LYON

CORRIGÉ

SCIENTIFIQUE MATHÉMATIQUES

le lecteur maîtrisant ses classiques — signe ambiant, références riemanniennes, test des équivalents — concluera que X ne possède pas d'espérance et qu'en conséquence elle a encore moins de variance.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On ne le répétera jamais assez, M_n n'est absolument pas le *maximum* des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, pour la simple et bonne raison qu'elles n'en possèdent pas, mais en revanche et même si cela dérange, nous avons plutôt

$$M_n = \sup(X_1, \ldots, X_n).$$

a. Soit x un nombre réel. La sempiternelle lapalissade du « $\sup$ » se traduit *as usual* par

$$[M_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x],$$

ce qui a déjà le privilège, comme nous allons bientôt le constater, de *démontrer* que M_n est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé sur lequel sont définies les variables X_i et que nous nous permettrons de baptiser $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$, puisque le texte n'a pas jugé bon de le faire.

Pour chaque entier $i \in \mathbb{N}^*$, puisqu'il est précisé que X_i est une variable aléatoire réelle sur notre espace, nous sommes tenus de savoir que

$$[X_i \leqslant x] \in \mathcal{A},$$

et comme les tribus sont, entre autres, stables par intersection finie, nous avons également

$$[M_n \leqslant x] \in \mathcal{A},$$

ce qui termine ce petit épisode tribal. Cela étant, et compte tenu de la mutuelle indépendance et de l'isonomie — la même loi — des variables X_i, nous assénons très *nautiquement* que

$$F_{M_n}(x) = \big(F_X(x)\big)^n.$$

↱ En vue d'argumentation future, nous allons quelque peu approfondir l'affaire. Les origines densitaires de la variable X font que la fonction F_X est ouvertement continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et ces deux propriétés sont *généreusement* transmises à la fonction

$$F_{M_n} = F_X^n.$$

Bref, la variable aléatoire M_n est également à densité et nous saurons nous en souvenir.

b. Notons momentanément μ — comme Machin ! — la fonction parfaitement définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall u \in]0, +\infty[, \qquad \mu(u) = \operatorname{Arctan} u + \operatorname{Arctan} \frac{1}{u}.$$

Elle est très pertinemment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a presque mentalement

$$\forall u \in]0, +\infty[, \qquad \mu'(u) = 0.$$

Seulement voilà, il se trouve que $]0, +\infty[$ est un authentique *intervalle* de $\mathbb{R}$ ce qui permet à la fonction μ d'y réclamer sa *constance*, et comme

$$\mu(1) = 2\,\text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{2}\cdots$$

↱ Voici une vieille anecdote qui devrait éveiller les méfiances de nos lecteurs dévoués. Notre gentille fonction μ est en réalité *farpaitement* définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et un jour d'un certain mois de mai des années 80 un texte de concours, que nous ne nommerons pas, demandait le calcul de $\mu(u)$ pour tout u réel non nul. On a évidemment comme *supra*

$$\forall u \in \mathbb{R}^*, \qquad \mu'(u) = 0,$$

et, à l'époque, pas loin de 98% des candidats ont dramatiquement répondu que μ était constamment égale à $\pi/2$ sur $\mathbb{R}^*$ alors que la réalité est bien différente puisque

$$\forall u \in \mathbb{R}^*, \qquad \mu(u) = \text{Arctan}\,u + \text{Arctan}\,\frac{1}{u} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad u > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad u < 0, \end{cases}$$

ce qui constitue d'ailleurs l'un des aspects des fameuses formules de John Machin.

Au risque de radoter, cette anecdote mérite que l'on clame dans les chaumières qu'une *dérivée nulle* n'a pratiquement jamais entraîné une *constance* vu que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont rares(*), voire très très rares !

Il nous reste maintenant à justifier une gentille équivalence. Nous le faisons, par exemple, en notant que

$$\text{Arctan}\,0 = 0 \quad \text{et} \quad \text{Arctan}'\,0 = 1,$$

et en s'appuyant sur la définition et sur quelques conséquences de la dérivabilité ponctuelle que nous résumons dans le résultat suivant.

DÉRIVABILITÉ ET ÉQUIVALENCE

Soit f une application numérique de variable réelle définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0. On suppose que f est dérivable en zéro. Alors,

i. on a, au voisinage de 0, et quoi qu'il arrive

$$f(u) - f(0) = uf'(0) + o(u)\,;$$

ii. en outre, si $f'(0) \neq 0$, on a l'équivalence

$$f(u) - f(0) \underset{u \to 0}{\sim} uf'(0).$$

Bien entendu, tout le monde aura bien reconnu ici les premiers pas vers l'exquis théorème de Brook Taylor, William Henry Young et l'acolyte Colin Maclaurin !

(*) Si l'on choisit au hasard une partie de $\mathbb{R}$, la probabilité qu'il s'agisse d'un *intervalle* est nulle ! *So*…

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 147 13/10/2017 11:34

c. Soit x un réel quelconque pour l'instant et organisons-nous *un poquitín*.

▹ Si x est strictement positif, étant donné les strictes positivités des uns et des autres(*) nous avons sans ambage

$$\big[Z_n \leqslant x\big] = \Big[M_n \geqslant \frac{n}{x}\Big],$$

et cela démontre que

$$\big[Z_n \leqslant x\big] \in \mathcal{A},$$

puisque M_n a récemment gagné ses galons de variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$.

▹ Si x est maintenant négatif ou nul, il est positivement acquis que

$$\big[Z_n \leqslant x\big] = \varnothing,$$

et il est bien connu que l'ensemble vide appartient à toutes les tribus du monde ! Nous avons ainsi établi que Z_n est également un authentique *alea numérique* sur notre espace probabilisé.

↱ Le texte semble faire fi des problématiques *tribales* que nous avons cru bon de mettre en avant par deux fois. Nous nous sommes donc sentis obligés de combler ces manques car n'est pas variable aléatoire qui veut, même si…

Revenons maintenant à nos moutons en annonçant $x > 0$. D'après ce que nous venons de constater, nous avons déjà

$$\mathrm{p}(Z_n \leqslant x) = \mathrm{p}\Big(M_n \geqslant \frac{n}{x}\Big) = 1 - F_{M_n}\Big(\frac{n}{x}\Big),$$

la dernière égalité reposant fermement sur la providentielle avancée *densitaire* que nous avons faite à l'issue de la question 12.*a* ainsi que sur l'adage bien connu selon lequel les variables à densité ne chargent rien sur leur passage. La stricte positivité de n/x, les questions 11.*a*, 12.*a* et la formule de Machin de la 12.*b* font alors *in fine* que tour à tour

$$\mathrm{p}(Z_n \leqslant x) = 1 - \Big(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{n}{x}\Big)^n = 1 - \Big(1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n}\Big)^n,$$

ce qui ne peut que nous satisfaire.

d. Soit n un entier naturel non nul, x un nombre réel et reprenons notre indispensable organisation.

▹ Si x est négatif ou nul, il est quasiment dit un peu plus haut que

$$F_{Z_n}(x) = 0,$$

et il en ressort évidemment que

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(*) Celle de M_n repose sur l'excellente idée du texte d'imposer des X_i à valeurs strictement positives !

▷ Si $x > 0$, le lecteur futé vérifiera aisément la stricte positivité du réel

$$1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n},$$

qui autorise la *neperienne* action grâce à laquelle

$$\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n}\Big)^n = n\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n}\Big)\cdot$$

Vu qu'il est indéniable que

$$\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

l'équivalence standard

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$$

nous amène gentiment vers

$$\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n}\Big)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2n}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n},$$

que la fin de la récente question b métamorphose transitivement en

$$\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n}\Big)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2x}{\pi}\cdot$$

Comme le *right hand side* ne dépend pas de n, il s'ensuit inexorablement que

$$\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n}\Big)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{2x}{\pi},$$

et puisque la fonction exponentielle est continue, nous avons également

$$\Big(1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n}\Big)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-2x/\pi}.$$

Autant dire alors que finalement

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - e^{-2x/\pi}.$$

Le résultat de toutes ces courses est donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-2x/\pi} & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

et l'impétrant *expoaffuté* concluera haut et fort que

$$Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathfrak{Z},$$

où $\mathfrak{Z}$ est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $2/\pi$, ce qu'il est autorisé de résumer en

$$Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)\cdot$$