CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer *à ESSEC Business School.*

Problème 1

Il est toujours amusant de lire cette phrase « on confond polynôme et application polynomiale » quand on sait que, la plupart du temps, l'impétrant ignore ce qu'est véritablement un polynôme…

Partie 1

1. Allons-y gaiement en trois temps.

– Nous avons déjà par définition le plongement

$$E \subset \mathbb{R}_4[X]$$

– Le polynôme nul appartient manifestement à E d'où l'indispensable non-vacuité espérée.

– Soit pour finir P et Q appartenant à E et λ un nombre réel. D'après la définition des opérations sur les applications nous avons les égalités

$$\big(P + \lambda Q\big)(0) = P(0) + \lambda Q(0) \quad \text{et} \quad \big(P + \lambda Q\big)(4) = P(4) + \lambda Q(4)$$

qui devraient suffire à nous faire entendre que

$$P + \lambda Q \in E$$

2. Cette fois nous y allons en quatre *rounds* !

– Soit Q appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$. Comme W est de degré 2 le produit WQ est d'ores et déjà un polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ et il suffit d'ouvrir les mirettes pour lui apercevoir les deux racines 0 et 4. En bref ϕ applique bien $\mathbb{R}_2[X]$ dans E.

– La linéarité de ϕ n'est qu'une vague histoire de distributivité du produit polynomial vis-à-vis de la somme.

– Soit Q appartenant au noyau de ϕ. Cela signifie bien sûr que

$$WQ = 0$$

Oui mais voilà, quand un produit de polynômes est nul, l'un des facteurs est nul(*) et comme ce n'est visiblement pas W…

En conséquence

$$\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$$

et ϕ est définitivement injective.

– Soit pour finir $P \in E$. Comme il possède les deux racines différentes 0 et 4, le produit $W = X(X-4)$ le divise et il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = WQ$$

(*) Cette importante propriété de l'ensemble des polynômes s'appelle « intégrité » et sa preuve est on ne peut plus élémentaire…

Il reste à ne pas avoir oublié que P appartient à $\mathbb{R}_4[X]$ et que

$$\deg P = \deg W + \deg Q = 2 + \deg Q$$

pour en déduire que Q appartient à $\mathbb{R}_2[X]$ et qu'en définitive

$$P = \phi(Q)$$

L'application ϕ est dorénavant surjective et notre petit tour est terminé.

3. Même si cela n'apparaît pas lumineusement dans le programme officiel, il semble difficile d'ignorer que par un isomorphisme de *machin* sur *chose* l'image de toute base de *machin* est une base de *chose*. Dans ces conditions et parce que la famille

$$(1, X, X^2)$$

a le privilège de « baser » — canoniquement même ! — l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, nous apprenons que

$$\big(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2)\big) = \big(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4)\big)$$

est une authentique base de E. Il suffit maintenant de compter *un, dos, tres* pour clamer que

$$\dim E = 3$$

4. Rappelons que lorsque P et Q sont deux polynômes, les *polynomeux*(*) se permettent souvent de noter $P(Q)$ la composition $P \circ Q$ qui, soit dit en passant, est encore évidemment polynomiale. Nous avons donc ici en réalité

$$P(X+1) = P \circ (X+1)$$

Observons d'ailleurs que les *probableux* font exactement la même chose lorsqu'ils s'autorisent à noter $\varphi(Y)$ la variable aléatoire $\varphi \circ Y$. Mais bon…

Rappelons également la quasi évidence selon laquelle

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad \forall Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \qquad \deg P(Q) = \deg P \cdot \deg Q$$

Signalons enfin que Δ est le célébrissime opérateur de Gregory-Newton à cela près que son champ d'action est ici confiné à $\mathbb{R}_2[X]$.

a. Nous y allons en deux manches !

– Soit P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$. La composition $P(X+1)$ est encore évidemment un polynôme qui, si l'on en croit notre récente remarque, est de même degré que P puisque

$$\deg(X+1) = 1$$

(*) Il y a les *footeux*, les *journaleux*, les *stateux*, les *polynômeux* et bien d'autres catégories de spécialistes…

La différence
$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$
est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à deux et Δ applique donc bien $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même.

– La linéarité de Δ repose quant à elle sur la distributivité *à gauche* de la composition par rapport à l'addition d'autant plus providentielle qu'elle ne l'est généralement pas *à droite*…

b. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Après l'avoir canoniquement écrit
$$Q = aX^2 + bX + c \quad \text{où} \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$
et en ouvrant bien ses mirettes, l'on trouve très tranquillement que
$$\deg \Delta(Q) = \begin{cases} \deg Q - 1 & \text{si} \quad \deg Q \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si} \quad \deg Q \leqslant 0 \end{cases}$$

c. Nous commencerons par le noyau et nous passerons ensuite à l'image.

– Soit Q appartenant au noyau de Δ. Nous avons du coup
$$\deg \Delta(Q) = -\infty$$
et il résulte de la précédente que cela n'est possible que si, et seulement si $Q \in \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi
$$\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$$

– À bien y regarder il résulte également de la précédente que
$$\forall Q \in \mathbb{R}_2[X] \qquad \deg \Delta(Q) \leqslant 1$$
à telle enseigne que déjà
$$\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}_1[X]$$
En outre, au vu et au su de ce qu'il vient d'advenir de $\operatorname{Ker} \Delta$ et de l'important théorème du rang il s'avère mentalement que
$$\dim \operatorname{Im} \Delta = 2$$
et nous sommes donc dans l'idéale situation
$$\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}_1[X] \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Im} \Delta = \dim \mathbb{R}_1[X]$$
Cela déclenche sur-le-champ le théorème du sous-espace vectoriel et voilà donc que
$$\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_1[X]$$

↱ On notera l'importance d'avoir commencé par le noyau ce qui était d'ailleurs fortement suggéré par le texte…

d. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. D'après la toute récente c, le polynôme $\Delta(Q)$ appartient à $\mathbb{R}_1[X]$ et il existe donc deux réels α et β tels que

$$\Delta(Q) = \alpha X + \beta$$

On en déduit alors *de memoria* que

$$\Delta^2(Q) = \alpha \quad \text{puis} \quad \Delta^3(Q) = 0$$

So…

↱ On retrouve, dans ce cas particulier, la classique *nilpotence* de l'opérateur de Gregory-Newton en dimension finie.

5. Notons que nous avons le diagramme

$$E \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{R}_2[X] \xrightarrow{\Delta} \mathbb{R}_2[X] \xrightarrow{\phi} E$$

qui révèle plusieurs choses

- *primo* l'application f est *farpaitement* définie ;
- *deuzio*, il s'agit bien d'une application de E dans lui -même ;
- *tertio*, il est bien question d'une application *linéaire* puisque les trois dont elle est la composée le sont.

En bref, f est effectivement un endomorphisme de E et l'on flaire comme une sorte de parfum de similitude…

a. On imagine bien comme, en situation de « similitude », que

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad f^p = \phi \circ \Delta^p \circ \phi^{-1}$$

une récurrence de Cotonou sur p se chargeant de la besogne. Nous avons alors en particulier

$$f^3 = \phi \circ \Delta^3 \circ \phi^{-1} = 0$$

puisque nous n'avons pas oublié la question 4.d.

b. Nous procédons encore une fois en les prenant l'un après l'autre.

- Soit $x \in E$. La bijectivité de ϕ permet de mettre en place l'équivalence logique

$$x \in \mathsf{Ker}\, f \iff \phi^{-1}(x) \in \mathsf{Ker}\, \Delta$$

Comme

$$\mathsf{Ker}\, \Delta = \mathbb{R}_0[X] = \mathsf{Vect}\,(1)$$

il s'ensuit bijectivement et mentalement que

$$\mathsf{Ker}\, f = \mathsf{Vect}\, \phi(1) = \mathsf{Vect}\, W$$

et la petite famille (W) est une base de $\operatorname{Ker} f$ puisque W n'est assurément pas le polynôme nul.

– Soit maintenant $y \in E$. L'on revendique *mutatis mutandis* l'équivalence

$$y \in \operatorname{Im} f \iff \phi^{-1}(y) \in \operatorname{Im} \Delta$$

Comme

$$\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_1[X] = \operatorname{Vect}(1, X)$$

il s'ensuit derechef bijectivement et mentalement que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(\phi(1), \phi(X)\big) = \operatorname{Vect}\big(W, XW\big)$$

Comme elle est indubitablement libre, la famille $\big(W, XW\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

c. Nous venons d'apprendre que

$$\mathrm{E}_0(f) \neq \{0\}$$

puisque l'on a depuis peu

$$\dim \mathrm{E}_0(f) = 1$$

Autant dire alors déjà que 0 est une valeur propre de f. D'autre part, si l'on en croit la récente $5.a$, le polynôme X^3 est annulateur de l'endomorphisme f et nous sommes alors supposés savoir que

$$\operatorname{Spec} f \subset \operatorname{root}(X^3) \quad i.e. \quad \operatorname{Spec} f \subset \{0\}$$

Il résulte ainsi de tout cela que

$$\operatorname{Spec} f = \{0\}$$

Quant à une base et à la dimension de $\mathrm{E}_0(f)$ nous y avons déjà répondu il n'y a pas si longtemps…

d. Il vient d'être dit que

$$\operatorname{Spec} f = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{E}_0(f) = 1$$

Comme $\dim E = 3$, la somme des dimensions des espaces propres de f n'est définitivement pas égale à la dimension de E — le compte n'est donc pas bon ! — et la condition nécessaire et suffisante dite « du comptable » affirme alors avec force que f n'est pas diagonalisable.

↱ Cela n'est pas vraiment étonnant car, comme dirait l'autre, les nilpotents diagonalisables sont à peu près aussi rares que les temples hindous à La Tranche-sur-Mer…

EM LYON

CORRIGÉ

Partie 2

6. Il y a deux façons de parvenir à nos fins, une en quatre points et une en cinq. Il est ici préférable d'y aller en cinq. *Here we go !*

– Les applications polynomiales étant définies partout, partout, il semble inéluctable que $<,>$ applique bien $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$.

– La symétrie de $<,>$ se contentera d'un mièvre *no comment*.

– On fixe $P \in \mathbb{R}_4[X]$. La linéarité de l'application

$$Q \longmapsto < P\,,\, Q >$$

résulte essentiellement de celle de la sommation ainsi que d'un *picochouia* de distributivité.

– Soit P appartenant à $\mathbb{R}_4[X]$. La positivité de la quantité

$$< P\,,\, P > = \sum_{i=0}^{4} \big(P(i)\big)^2$$

ne peut échapper qu'à ceux — ou celles — qui souffrent de diplopie avancée.

– Soit pour finir P un polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ vérifiant

$$< P\,,\, P > = 0$$

Cela se traduit par

$$\sum_{i=0}^{4} \big(P(i)\big)^2 = 0$$

et l'argument éculé des « sommes nulles de réels de même signe » oblige alors

$$P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$$

Le polynôme P, depuis toujours situé dans $\mathbb{R}_4[X]$, osant revendiquer *cinq* racines distinctes, doit littéralement se condamner à une navrante nullité *and Bob's your uncle !*

↱ Ce produit scalaire a sa part de popularité. Il s'appelle produit scalaire de Joseph-Louis Lagrange attaché à la liste $(0, 1, 2, 3, 4)$.

7. Nous aborderons la question en trois phases.

– La première chose importante est le côté *inside* $\mathbb{R}_2[X]$, de la famille en question. Un espace vectoriel n'est en effet ni engendré, ni encore moins « basé », par des extraterrestres !

– La seconde passe par un indispensable test de liberté. Soit donc a, b, c des réels vérifiant

$$a(X-2)(X-3) + b(X-1)(X-3) + c(X-1)(X-2) = 0 \qquad \text{(TL)}$$

Il suffit alors d'évaluer tour à tour en $1, 2$ et 3 pour récupérer

$$a = b = c = 0$$

MATHÉMATIQUES SCIENTIFIQUE

et la famille
$$(L_1, L_2, L_3)$$
est ainsi déjà libre dans $\mathbb{R}_2[X]$.

– Reste à faire à nouveau appel à Ricky Martin. La famille (L_1, L_2, L_3) est de longueur 3 et il se trouve que précisément
$$3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$$
L'histoire se termine alors *via* le théorème de caractérisation des bases en dimension finie.

8.a. Soit P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$. Base oblige, il existe trois réels a, b et c tels que
$$P = aL_1 + bL_2 + cL_3$$
Comme *supra* on évalue tour à tour en $1, 2$ et 3 et *boum !*
$$P(1) = 2a \quad ; \quad P(2) = -b \quad ; \quad P(3) = 2c$$
Les coordonnées espérées sont donc dans cet ordre
$$\frac{P(1)}{2} \quad ; \quad -P(2) \quad ; \quad \frac{P(3)}{2}$$

b. Nous les prenons les uns après les autres.

– Nous avons tout d'abord et mentalement
$$\Delta(L_1) = (X-1)(X-2) - L_1 = L_3 - L_1$$
la dernière égalité prouvant que le *physio* n'est pas bigleux !

– Nous passons ensuite à
$$\Delta(L_2) = X(X-2) - L_2$$
Il y aurait certes plusieurs façons de tracer la route mais comme l'on a aisément
$$\Delta(L_2)(1) = -1 \quad ; \quad \Delta(L_2)(2) = 1 \quad ; \quad \Delta(L_2)(3) = 3$$
la précédente question assure que
$$\Delta(L_2) = -\frac{1}{2}L_1 - L_2 + \frac{3}{2}L_3$$

– En suivant la même route que celle empruntée pour débusquer $\Delta(L_2)$, l'on trouve cette fois que
$$\Delta(L_3) = -2L_2 + 2L_3$$
et l'obtention de la matrice n'est alors qu'une affaire de protocole.

9. C'est ici qu'une percutante remarque lagrangienne s'impose. Le lecteur cultivé a dû percevoir en L_1, L_2 et L_3 un puissant fumet de polynômes de Lagrange à cela près qu'il ne s'agit pas exactement des authentiques. Du coup, la belle δ-propriété des *genuine* polynômes de Joseph-Louis est ici un peu moins classe, en l'occurrence

$$\forall i \in [\![1,3]\!] \quad \forall k \in [\![1,3]\!] \qquad L_i(k) = \delta_{ik} L_i(i)$$

où δ_{ik} est encore une fois le fameux symbole de Leopold Kronecker.

a. No comment !

b. On s'organise !

- On vérifie aisément que la famille (N_1, N_2, N_3) est intérieure à E.
- Soit maintenant i et j deux éléments de $[\![1,3]\!]$. Nous avons

$$< N_i\,,\, N_j > = \frac{1}{M_i(i)M_j(j)} \sum_{k=0}^{4} M_i(k) M_j(k)$$

et comme W s'annule en zéro et en quatre, la somme se raccourcit un peu et nous avons en réalité

$$< N_i\,,\, N_j > = \frac{1}{M_i(i)M_j(j)} \sum_{k=1}^{3} W^2(k) L_i(k) L_j(k)$$

Notre récente lagrangienne discussion prend maintenant le relais et voilà donc que

$$< N_i\,,\, N_j > = \frac{1}{M_i(i)M_j(j)} \sum_{k=1}^{3} W^2(k) \delta_{ik} L_i(i) \delta_{jk} L_j(j)$$

Comme c'est toujours un plaisir de gérer les « δ » de Kronecker, il ne devrait rester que

$$< N_i\,,\, N_j > = \delta_{ij} \frac{W(i)L_i(i)W(j)L_j(j)}{M_i(i)M_j(j)}$$

cette *tricky* écriture reposant sur l'amusante égalité

$$W^2(j)\delta_{ij} = W(i)W(j)\delta_{ij}$$

Après une intervention musclée du *physio*, il advient finalement que

$$< N_i\,,\, N_j > = \delta_{ij}$$

chronique d'une orthonormalité annoncée…

↱ Nous aurions pu éviter le recours aux δ-*properties* lagrangiennes en procédant de façon beaucoup plus manuelle. Le seul intérêt que nous y voyons est la possibilité de généraliser une grande partie de ce texte à l'espace $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ en lieu et place de $\mathbb{R}_4[X]$ et de manipuler ainsi des sommes de type

$$\sum_{k=0}^{n+1} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n}$$

plutôt que les puériles ou enfantines

$$\sum_{k=0}^{4} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{3}$$

A-t-on eu peur de traumatiser l'impétrant qui préfère les chiffres aux lettres ? ?

10. Le programme officiel s'étant enfin décidé à choisir la façon la plus efficace de noter les matrices d'applications linéaires, la matrice ici demandée n'est autre que

$$\mathtt{Mat}_{N,L}(\phi)$$

où, à la surprise générale, nous nous sommes autorisés les notations

$$L = (L_1, L_2, L_3) \quad \text{et} \quad N = (N_1 N_2, N_3)$$

La suite n'est plus qu'une affaire de protocole et on trouve aisément

$$\mathtt{Mat}_{N,L}(\phi) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

les raisons essentielles étant

$$M_1(1) = -6 \quad ; \quad M_2(2) = 4 \quad ; \quad M_3(3) = -6$$

11. La formule « produit matriciel et composition » et son sympathique côté *chaslien* s'écrit ici

$$\mathtt{Mat}_N(f) = \mathtt{Mat}_{N,N}(\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}) = \mathtt{Mat}_{N,L}(\phi) \cdot \mathtt{Mat}_{L,L}(\Delta) \cdot \mathtt{Mat}_{L,N}(\phi^{-1})$$

En utilisant ensuite la formule « matrice et inversion », l'on déduit finalement que

$$\mathtt{Mat}_N(f) = \mathtt{Mat}_{N,L}(\phi) \cdot \mathtt{Mat}_L(\Delta) \cdot \left[\mathtt{Mat}_{N,L}(\phi)\right]^{-1}$$

Grâce à la précédente et aussi à la question 8.*b* on trouve alors très poétiquement que

$$\mathtt{Mat}_N(f) = \begin{bmatrix} -1 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 \\ 1 & -9/4 & 2 \end{bmatrix}$$

12.*a.b.c*. Soit P appartenant à $\mathbb{R}_4[X]$ et $i \in [\![1, 3]\!]$. Vu la physionomie des lieux et parce que nous connaissons bien nos classiques nous décidons, *manu militari*, de calculer le produit scalaire de P par N_i. Ce sont encore le même genre de raccourcissement et de δ-*property* qui devraient nous amener tout d'abord à

$$< P \,,\, N_i > = \frac{1}{M_i(i)} \sum_{k=1}^{3} P(k) W(k) \delta_{ik} L_i(i)$$

puis pour finir à

$$< P \,,\, N_i > = P(i)$$

après une toujours aussi sympathique δ-gestion et un réveil autoritaire du *physio*. Du coup, nous avons définitivement

$$u(P) = \sum_{i=1}^{3} < P \,,\, N_i > N_i$$

Comme (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormale de E nul ne peut ignorer que u est le projecteur orthogonal sur E et les questions a, b et c sont simultanément *in the pocket !*

d. Que diriez-vous de

$$u(Q) = 2N_1$$

juste pour voir ?

Problème 2

À LIRE EN GUISE DE PROLÉGOMÈNE :

Voici en vrac trois petites réflexions qui auront simplement pour but de mettre quelques points sur les « i » et d'améliorer ainsi notre quotidien.

– Nous mettons tout d'abord en place un outil anodin qui aurait dû être officiel comme il l'était d'ailleurs dans l'ancien programme. Il s'agit de l'inégalité triangulaire pour une intégrale *impropre*. Nous ne pousserons pas le vice à présenter le cas le plus général et nous nous contenterons de ce qui sera parfois utile à nos affaires.

THÉORÈME TRIANGULAIRE :

Soit f une application continue de l'intervalle $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est absolument *intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui signifie évidemment que*

$$\int_0^{+\infty} |f|$$

existe. On a alors l'inégalité

$$\left| \int_0^{+\infty} f \right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f|$$

et nous n'insistons pas sur la position relative(*) des bornes dans la mesure où ici...

La preuve se déduit *a la mano* de l'inégalité triangulaire pour une intégrale *propre* qui, fort heureusement, n'a quant à elle pas disparu des programmes !

– Puisqu'il est évidemment hors de question d'appliquer le triangle à une *semi convergente*, il est bon de disposer d'arguments qui permettent de justifier sans douleur l'intégrabilité *absolue*. En voici un très simple :

(*) Nous rappelons que dans le cas général du triangle cette position relative est à surveiller avec beaucoup d'attention !

INTÉGRABILITÉ ABSOLUE ET COMBINAISONS LINÉAIRES :
Toute combinaison linéaire de fonctions absolument intégrables sur un intervalle est également absolument intégrable sur cet intervalle.

La preuve, *a la mano*, se fait *via* le théorème de linéarité et grâce à un *chouia* de comparaison en signe positif.

– Notons enfin une dernière chose dans ce prologue. Nous venons à l'occasion du triangle de parler de disposition relative de bornes. Cet état des choses est aussi un point capital dans l'utilisation de la croissance — ou la positivité — de l'intégration et comme dans ce texte les bornes d'intégration ne seront pratiquement *jamais* de guingois il nous arrivera de passer la chose sous silence. Nous espérons en être pardonnés !

Nous utiliserons librement toutes ces révélations.

Partie 1

1. Très curieux ce plongement ! Si cela ne dérange personne et parce que nous le valons bien nous montrerons plutôt que E est un sous-espace vectoriel de l'espace

$$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

des applications *continues* de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ puisqu'il est bien connu que dans les histoires de plongement, plus on *zoome*, moins il y a de travail... *Here we go !*

– Le plongement

$$E \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

est d'actualité par définition de E.

– La fonction nulle est là pour assurer la vitale non vacuité.

– Soit u et v deux applications appartenant à E et λ un nombre réel. Il existe par définition deux entiers naturels p et q tels que

$$u(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^p) \quad \text{et} \quad v(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^q)$$

Ce n'est alors qu'une formalité que d'établir que

$$(u + \lambda v)(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{p+q})$$

et comme $p + q$ est *naturellement* entier...

2. Soit x un réel strictement positif. Comme u appartient à E, il existe un naturel p tel que

$$u(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^p)$$

d'où il ressort machinalement que

$$t^2 u(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(t^{p+2}e^{-xt}\right)$$

le lecteur étant supposé rompu aux manipulations des *petitos* d'Edmund Landau. Il reste alors à ne pas avoir égaré la classique prépondérance selon laquelle

$$t^{p+2}e^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

puisque, au risque de radoter(*), le réel x est idéalement situé.

Poursuivons. La fonction u étant par hypothèse continue sur $[0,+\infty[$, il en est *généreusement* de même de

$$t \longmapsto u(t)e^{-xt}$$

et notre intégrale n'est donc impropre qu'en plus l'infini. Il semble qu'à l'instant, nous avons constaté que

$$u(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et bien sûr} \quad \forall t \geqslant 1 \quad \frac{1}{t^2} \geqslant 0$$

et comme nous maîtrisons *farpaitement* nos références, nous déduisons du test de prépondérance en signe positif l'existence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} u(t)e^{-xt}dt$$

Oui mais voilà, la *généreuse* continuité sur $[0,+\infty[$ évoquée *supra* fait que

$$\int_1^{+\infty} u(t)e^{-xt}dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}dt$$

sont de même nature. *So*…

↱ Cette convergence résultant du test de prépondérance en signe positif est en réalité une convergence *absolue*. Nous saurons nous en souvenir…

3. L'intégration aurait-elle cessé d'être linéaire ?

↱ On vient d'établir que L est une application linéaire de l'espace vectoriel E vers celui des applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Cette application L est un célèbre opérateur appelé « transformation de Laplace ».

Partie 2

Avant de commencer nous mettons en place un petit *addendum* concernant la fonction gamma d'Euler.

LES SATELLITES DE LA FONCTION GAMMA :

Soit x et y deux réels strictement positifs. Alors, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-yt}dt$$

(*) Nous en profitons pour rappeler que dans cette armada de prépondérances officielles certains paramètres doivent impérativement être strictement positifs. Sinon bobo, gros bobo…

existe et l'on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-yt}dt = \frac{\Gamma(x)}{y^x}$$

La preuve :
Comme x est strictement positif, nous savons que $\Gamma(x)$ existe et que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du$$

Nous suggèrons alors d'y réaliser le *pico* changement de variable affine

$$u = yt$$

La stricte positivité de y fait que la fonction $t \mapsto yt$ réalise allégrement une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur lui même à telle enseigne que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} y^x t^{x-1}e^{-yt}dt$$

existe également et vaut encore $\Gamma(x)$. *Thank's to* $y^x \neq 0$ et à un *chouia* de linéarité, il en résulte aussitôt que

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-yt}dt \quad \text{existe et que} \quad \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-yt}dt = \frac{\Gamma(x)}{y^x}$$

Nous pouvons commencer. . .

4. Nous trouvons curieux de supposer a *strictement* positif. Sa positivité large suffit amplement et c'est donc elle que nous supposerons. De même, situer l'entier i dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ nous paraît un peu timoré et nous élevons donc le débat en annonçant carrément $a \geqslant 0$ et $i \in \mathbb{N}$.

La continuité sur $\mathbb{R}_+$ de l'application

$$v_i : t \longmapsto t^i e^{-at}$$

est assurément à l'ordre du jour et c'est déjà une bonne chose. Notons ensuite que la positivité large de a doit nous permettre de réclamer avec force la prépondérance

$$v_i(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{i+1})$$

et tout cela dépose délicatement l'application v_i dans l'espace vectotiel E.

Soit maintenant $x > 0$. Observons que, malgré nos changements, le réel $x + a$ est également positif strict, ce qui nous permet de revendiquer tour à tour

$$L(v_i)(x) = \int_0^{+\infty} v_i(t)e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} t^i e^{-(x+a)t}dt = \frac{\Gamma(i+1)}{(x+a)^{i+1}}$$

la toute dernière égalité reposant sur la délicieuse satellisation évoquée au début de cette partie ainsi que sur les *strictes* positivités des nombres $i+1$ et $x+a$.

Comme nous connaissons par cœur le Gamma des integers, l'histoire se termine sur

$$L(v_i)(x) = \frac{i!}{(x+a)^{i+1}}$$

5. Il suffit de choisir

$$a = 0 \quad \text{et} \quad i = n$$

et d'appliquer la précédente modifiée par nos soins…

Partie 3

6. Nous savons déjà par définition qu'il existe un entier naturel p tel que

$$\frac{u(t)}{t^p} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Jouons alors $\epsilon = 1$ sur ce très providentiel *jack-pot*. Nous y gagnons un réel strictement positif A tel que

$$\forall t \geqslant A \qquad \frac{|u(t)|}{t^p} \leqslant 1$$

ce qui, très positivement, peut également se décliner en

$$\forall t \geqslant A \qquad |u(t)| \leqslant t^p$$

et qui n'est sûrement pas pour nous déplaire.

À côté de cela la fonction u est ouvertement continue sur le segment $[0, A]$ et nous sommes supposés savoir qu'elle y est fatalement bornée(*). Autant dire alors qu'il existe également un réel positif M tel que

$$\forall t \in [0, A] \qquad |u(t)| \leqslant M$$

and Bob's your uncle !

Poursuivons en annonçant t positif et planifions *un poquitín*.

- Si t appartient au segment $[0, A]$, nous avons

$$|u(t)| \leqslant M$$

et *a fortiori*

$$|u(t)| \leqslant M + t^p$$

vu la positivité de qui de droit.

- Si maintenant $t > A$, l'on a cette fois

$$|u(t)| \leqslant t^p$$

(*) Un important théorème de Weierstrass assure même qu'elle y possède un maximum et un minimum. Ce n'est pas peu dire !

et *a fortiori*…

Soit maintenant $x > 0$. Nous avons déjà dit que nous n'oublierions pas la convergence *absolue* de l'intégrale définissant $L(u)(x)$. Dans ces conditions, l'importante inégalité du triangle que nous avons pris soin de mettre en place au tout début devrait stipuler dans un premier temps que

$$\big|L(u)(x)\big| \leqslant \int_0^{+\infty} |u(t)|e^{-xt}dt$$

Signalons ensuite que, selon les questions 1 et 5, la fonction

$$t \longmapsto M + t^p$$

appartient sérieusement à E et que, d'après ce qui précède et la la *positivité* de l'intégration l'on a

$$\big|L(u)(x)\big| \leqslant \int_0^{+\infty} (M + t^p)e^{-xt}dt$$

puisque les bornes sont idéalement disposées…

La linéarité de l'intégration et la sempiternelle question 5 appliquée aux choix

$$n = 0 \quad \text{puis} \quad n = p$$

révèlent pour finir que

$$\big|L(u)(x)\big| \leqslant \frac{M}{x} + \frac{n!}{x^{n+1}}$$

et le *squeezing process* emballe cette sympathique limite en plus l'infini. Nul doute qu'effectivement

$$L(u)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

7. On observera que l'intégrale de u n'est impropre qu'en plus l'infini et que, par définition, l'application R est le reste de cette dernière.

a. Une très bonne façon d'accommoder les restes est de clamer haut et fort que

$$R(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

parce que nous le savons bien ! Autant dire alors déjà que

$$R(t) \underset{t \to +\infty}{=} o(1) \quad i.e. \quad R(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\big(t^0\big)$$

et il nous reste maintenant à causer de continuité. *Here we go !*

Pour chaque réel positif t, nous pouvons écrire(*)

$$R(t) = -\int_{+\infty}^{t} u(s)ds$$

(*) L'une des rares intégrales de notre environnement immédiat dont les bornes sont un peu dérangées, mais c'est pour la bonne cause…

et le théorème de Gaston Darboux est formel. Dans la mesure où l'application u est *continue* sur $\mathbb{R}_+$, sa copine R est l'opposée de l'une de ses *primitives* et hérite, à ce titre, d'une classe $\mathcal{C}^1$ fort méritée.

Qui dit classe $\mathcal{C}^1$, dit *a fortiori* classe $\mathcal{C}^0$ et au bout du compte, l'on a bel et bien l'appartenance

$$R \in E$$

b. Il semble que tout vient d'être dit à l'instant puisque la dérivée d'une primitive…

c. Soit x un réel strictement positif. Dans l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}dt$$

nous envisageons une intégration par parties et pourquoi pas au travers des deux fonctions

$$U : t \longmapsto e^{-xt} \quad \text{et} \quad V : t \longmapsto -R(t)$$

La première a *exponentiellement* une énorme classe sur $\mathbb{R}_+$, la seconde y est depuis peu de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad U'(t) = -xe^{-xt} \quad \text{et} \quad V'(t) = u(t)$$

puisque R est, toujours depuis peu, une primitive de $-u$. Du *reste*, le produit UV possède en plus l'infini la limite finie zéro, la positivité de x ayant, bien sûr, quelque chose à voir avec l'affaire. Comme $U(0)V(0) = -R(0)$, il résulte du théorème d'intégration impropre *by parts* que

$$\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}dt = R(0) - x\int_0^{+\infty} R(t)e^{-xt}dt$$

ou encore

$$L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$$

puisque les deux fonctions u et R ont eu l'excellente idée d'appartenir(*) à E.

↱ Le théorème d'intégration impropre *by parts* n'est toujours pas dans les nouvelles versions du programme. Nous demandons donc à notre obéissant lecteur de prendre le temps de rédiger la pénible mouture partialisée de la question !

d. Nous avons récemment signalé que

$$R(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Il suffit alors de jouer $\epsilon/2$ sur ce providentiel *jack pot*. On y gagne effectivement un réel positif B tel que

$$\forall t \geqslant B \qquad \left|R(t)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

(*) Il est évidemment hors de question de faire agir l'opérateur L sur une fonction qui oserait ne pas appartenir à E…

Soit alors $x > 0$. Il résulte déjà et mentalement de la précédente que

$$\left|L(u)(x) - R(0)\right| = x\left|\int_0^{+\infty} R(t)e^{-xt}dt\right|$$

Comme R appartient à E et parce que nous le savons bien, l'intégrale entre les barreaux est *absolument* convergente et force est de constater(*) qu'après triangulation

$$\left|L(u)(x) - R(0)\right| \leqslant x\int_0^{+\infty} \left|R(t)\right|e^{-xt}dt$$

C'est au tour de Michel Chasles de prendre la main et de révéler ainsi que

$$\left|L(u)(x) - R(0)\right| \leqslant x\int_0^{B} \left|R(t)\right|e^{-xt}dt + x\int_B^{+\infty} \left|R(t)\right|e^{-xt}dt$$

Il reste alors à mettre en avant les évidences et les acquis selon lesquels

$$\forall t \in [0, B] \qquad \left|R(t)\right|e^{-xt} \leqslant \left|R(t)\right| \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant B \qquad x\left|R(t)\right|e^{-xt} \leqslant \frac{\epsilon}{2}\cdot xe^{-xt}$$

et d'en déduire par croissance intégrale et par calcul mental que d'une part

$$x\int_0^{B} \left|R(t)\right|e^{-xt}dt \leqslant x\int_0^{B} \left|R(t)\right|dt$$

et que d'autre part

$$x\int_B^{+\infty} \left|R(t)\right|e^{-xt}dt \leqslant \frac{\epsilon}{2}\Big[-e^{-xt}\Big]_B^{+\infty} = \frac{\epsilon}{2}e^{-xB} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

les positivités des uns et des autres et les places relatives des bornes ayant encore une fois été au cœur de certains débats.

e. L'on se doute bien que cette limite va avoir droit à un traitement *epsilontik*. L'annonce du crucial $\epsilon > 0$ indispensable à ce genre de traitement de faveur a été faite un peu plus haut et nous venons déjà d'en déduire l'existence d'un réel positif B vérifiant

$$\forall x > 0 \qquad \left|L(u)(x) - R(0)\right| \leqslant x\int_0^{B} \left|R(t)\right|dt + \frac{\epsilon}{2}$$

Comme l'intégrale $\int_0^B |R|$ ne dépend que de ϵ il est incontestable que

$$x\int_0^{B} \left|R(t)\right|dt \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$$

(*) Comme disait Claire…

limite qui se traduit de manière *epsilontik* par l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]0, \eta\right] \qquad x \int_0^B \left|R(t)\right| dt \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Le résultat de toutes ces courses est ainsi que

$$\forall x \in \left]0, \eta\right] \qquad \left|L(u)(x) - R(0)\right| \leqslant \epsilon$$

et, à bien y regarder, nous avons établi *via* la définition *epsilontik* que

$$L(u)(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} R(0)$$

Comme

$$R(0) = \int_0^{+\infty} u(t) dt$$

il est définitivement urgent de tourner la page !

8.a. La position géographique de la fonction u' permet de lui appliquer le tout début de la question 6.a en y remplaçant évidemment l'application u par sa dérivée. Cela produit déjà un entier naturel p et un réel positif A tels que

$$\forall s \geqslant A \qquad \left|u'(s)\right| \leqslant s^p$$

Soit alors $t \geqslant A$. La fonction u' étant en outre géographiquement *continue* sur $\mathbb{R}_+$, il est possible de lui imposer la formule de Barrow à telle enseigne que

$$u(t) = u(A) + \int_A^t u'(s) ds$$

L'inégalité triangulaire sommatoire suivie de sa cousine intégrale permettent ainsi d'en déduire que

$$\left|u(t)\right| \leqslant \left|u(A)\right| + \int_A^t \left|u'(s)\right| ds$$

puisque les bornes A et t sont idéalement disposées. Comme, quelques lignes plus haut, il vient d'être écrit que

$$\forall s \in [A, t] \qquad \left|u'(s)\right| \leqslant s^p$$

et que les bornes n'ont pas changé d'âne, c'est cette fois la croissance de l'intégration qui prend le relais et voilà donc désormais que tour à tour

$$\int_A^t \left|u'(s)\right| ds \leqslant \int_A^t s^p ds = \left[\frac{s^{p+1}}{p+1}\right]_A^t = \frac{t^{p+1}}{p+1} - \frac{A^{p+1}}{p+1} \leqslant \frac{t^{p+1}}{p+1}$$

tout cela se passant pratiquement de tout commentaire une fois que l'on a bien capté que

$$p + 1 > 0 \quad \text{et} \quad A \geqslant 0$$

C'est derechef une raison suffisante pour changer de question.

b. La continuité de u provient déjà de sa dérivabilité et, à bien y regarder, il résulte mentalement de la précédente que

$$u(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{p+2})$$

So…

c. Soit x un réel strictement positif. Comme u' appartient à E nous sommes en droit d'écrire que

$$L(u')(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}u'(t)dt$$

et nous allons une nouvelle fois procéder *por partes* mais en choisissant ici les fonctions

$$U : t \longmapsto e^{-xt} \quad \text{et} \quad V : t \longmapsto u(t)$$

La première possède toujours une énorme classe sur $\mathbb{R}_+$, la seconde y est annoncée de classe $\mathcal{C}^1$ et nous avons

$$\forall t \geqslant 0 \qquad U'(t) = -xe^{-xt} \quad \text{et} \quad V'(t) = u(t)$$

La chose importante à ne pas manquer maintenant est le comportement en plus l'infini du produit UV. C'est la providentielle et récente question a qui va se charger de la besogne. Elle induit en effet l'inégalité

$$\forall t \geqslant A \qquad \big|U(t)V(t)\big| \leqslant e^{-xt}\big|u(A)\big| + \frac{t^{p+1}e^{-xt}}{p+1}$$

de laquelle s'ensuit *by squeeze* que

$$U(t)V(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

puisque nous maîtrisons sans fléchir nos classiques prépondérances. Le théorème d'intégration impropre par parties révèle alors que

$$L(u')(x) = \Big[U(t)V(t)\Big]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-xt}u(t)dt$$

ce qui, au vu et au su de ce que nous venons de décliner à l'instant, devient effectivement

$$L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$$

puisque la toute récente appartenance à E de la fonction u a permis au *physio* de métamorphoser l'intégrale du *right hand side*.

↱ La remarque faite à l'issue de l'intégration par parties de la question 7.c n'est pas que *partiellement* d'actualité, cela va sans dire…

9.a. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Nous ne dirons que deux choses :

– puisque u est par hypothèse continue sur $\mathbb{R}_+$, selon les théorèmes généraux, il en est de même de l'application u_n ;

– il est également et hypothétiquement précisé qu'il existe un entier p tel que

$$u(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^p)$$

et il en ressort quasi instantanément que

$$u_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{n+p})$$

ce qui nous permet d'envisager la suite.

↱ Ce résultat n'est pas vraiment surprenant car le lecteur pourra s'amuser à constater que l'espace vectoriel E est en réalité stable par le produit fonctionnel en ce sens que

$$u \in E \quad \text{et} \quad v \in E \quad \Longrightarrow \quad uv \in E$$

b. Soit a un nombre réel. La fonction exponentielle exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et accessoirement de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0, a]$. Nous pouvons donc lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre les deux réels 0 et a. *This yields*

$$|e^a - 1 - a| \leqslant \frac{a^2}{2} \cdot \max_{[0,a]} |\exp''|$$

Mais, sans vouloir blesser personne, il semble que :

$$\max_{[0,a]} |\exp''| = \max_{[0,a]} \exp = \begin{cases} e^a & \text{si} \quad a \geqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Ce maximum est à l'évidence toujours plus petit que $e^{|a|}$ et $a^2/2$ est gentiment positif. *So...*

c. Soit t un réel positif. Il est tout à fait envisageable de dédier la précédente à $a = -ht$ et il devrait tranquillement s'ensuivre que

$$\left|e^{-ht} - 1 + ht\right| \leqslant \frac{h^2t^2}{2} e^{t|h|}$$

les quantités déjà positives étant, *as usual*, dispensées de valuation. On divise ensuite par le *strictement* positif $|h|$ tout en multipliant dans la foulée par le positif e^{-xt}. Nous parvenons ainsi sans encombre à

$$\left|\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt}\right| \leqslant \frac{|h|t^2}{2} e^{t(|h|-x)}$$

Reste alors à profiter de l'hypothèse(*) :

$$|h| \leqslant \frac{x}{2}$$

grâce à laquelle nous avons tout d'abord

$$|h| - x \leqslant -\frac{x}{2}$$

puis ensuite

$$\frac{|h|t^2}{2} e^{t(|h|-x)} \leqslant \frac{|h|t^2}{2} e^{-xt/2}$$

quelques positivités environnementales et la croissance de l'exponentielle n'étant pas totalement étrangères à l'affaire. La transitivité de l'ordre se charge alors de conclure le premier *round*.

En ce qui concerne le second set, il est tout d'abord *impératif* de mentionner les choses suivantes :

– il est dit que u appartient à E et que x est strictement positif. Nous savons alors depuis une fort belle lurette que $L(u)(x)$ existe ;

– nous avons déjà profité une première fois de l'hypothèse de confort

$$-\frac{x}{2} \leqslant h \leqslant \frac{x}{2}$$

et elle va bientôt avoir son deuxième effet *kiss cool*. Elle signale en effet que

$$x + h \geqslant \frac{x}{2} > 0$$

et procure ainsi une existence paisible à $L(u)(x+h)$;

– selon la récente question 9.a la fonction u_1 appartient également à E et comme le réel x n'a pas changé d'âne nous pouvons claironner que $L(u_1)(x)$ existe à son tour.

Nous sommes désormais parfaitement autorisés à jeter notre dévolu sur la quantité

$$\mathrm{D}_h = \left| \frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) \right|$$

qui, après remplacement des uns et des autres par leurs vrais visages, n'est autre que

$$\mathrm{D}_h = \left| \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)e^{-(x+h)t}dt - \int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}dt}{h} + \int_0^{+\infty} tu(t)e^{-xt}dt \right|$$

(*) Pour les initiés, c'est la fameuse hypothèse de confort.

La linéarité de l'intégration et une indispensable réorganisation de l'intérieur amènent dans un premier temps à

$$\mathrm{D}_h \leqslant \left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-(x+h)t}-e^{-xt}}{h}+te^{-xt}\right)u(t)dt\right|$$

et nous empressons de faire remarquer que la grosse intégrale située entre les barreaux est *absolument*(*) convergente ce qui permet de la *trianguler* allégrement et d'obtenir ainsi, *by transit*, la nouvelle majoration

$$\mathrm{D}_h \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{e^{-(x+h)t}-e^{-xt}}{h}+te^{-xt}\right|\left|u(t)\right|dt$$

Soit alors t un réel positif. Si l'on en croît le premier *round* et la positivité de $|u|$, nous devrions déjà pouvoir revendiquer l'inégalité

$$\left|\frac{e^{-(x+h)t}-e^{-xt}}{h}+te^{-xt}\right|\left|u(t)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}t^2\left|u(t)\right|e^{-xt/2}$$

et la destination est proche !

La question 9.a a en effet permis d'établir l'appartenance à E de la fonction u_2 et la précieuse observation que nous avons faite à l'issue de la question 2 permet aisément d'en déduire que $|u_2|$ appartient pareillement à E. En outre et vu que le réel $x/2$ est tout aussi strictement positif que son double, nous sommes en mesure d'affirmer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^2\left|u(t)\right|e^{-xt/2}dt$$

existe. La conclusion se fait alors *via* la croissance de l'intégration et grâce à un *picochouia* de linéarité.

d. Comme l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-xt/2}\left|u(t)\right|dt$$

ne dépend visiblement pas de h, il y a indiscutablement *squeeze* dans la précédente lorsque h tend vers zéro et du coup

$$\frac{L(u)(x+h)-L(u)(x)}{h}+L(u_1)(x)\xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

ce qui revient à dire que

$$\frac{L(u)(x+h)-L(u)(x)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{} -L(u_1)(x)$$

La fonction $L(u)$ est donc par définition dérivable en x et

$$\big(L(u)\big)'(x) = -L(u_1)(x)$$

(*) Son intégrande est ouvertement une combinaison linéaire de trois fonctions absolument intégrables et prolégomène *dixit*…

et comme cela vaut pour tous les réels x *strictement* positifs…

e. Après un examen approfondi(*) de la situation, nous suggérons de justifier que, pour tout entier n naturel non nul, la fonction $L(u)$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\big(L(u)\big)^{(n)} = (-1)^n L(u_n)$$

Comme indiqué dans notre récente note de bas de page, nous nous y prenons par induction sur n. *Here we go !*

• L'initialisation à $n = 1$ vient d'être faite à l'instant.

• Supposons que, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $L(u)$ soit n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\big(L(u)\big)^{(n)} = (-1)^n L(u_n)$$

Le clou de l'argumentation est alors le suivant. Comme depuis peu l'application u_n appartient à E, on peut appliquer la question $9.d$ en y remplaçant u par sa cousine u_n et l'on apprend ainsi que $L(u_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\big(L(u_n)\big)' = -L(v_n)$$

où v_n est l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall t \geqslant 0 \qquad v_n(t) = t u_n(t)$$

Autant dire alors que $L(u)$ est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\big(L(u)\big)^{(n+1)} = (-1)^{n+1} L(v_n)$$

Comme finalement v_n n'est rien d'autre que u_{n+1}, il semble que la boucle soit bouclée…

↱ Nous rappelons aux étourdis que la dérivabilité n fois pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ ou la classe $\mathcal{C}^\infty$ sont comme le bonnet blanc et le blanc bonnet. *So*…

Partie 4

$10.a$. Il suffit d'appliquer deux fois à la queue leu leu les questions $8.b.c$!

– Vu que u'' appartient à E, l'on en déduit que u' appartient à E également et que

$$\forall x > 0 \qquad L(u'')(x) = -u'(0) + xL(u')(x)$$

– Puisque désormais u' appartient à E, il en est de même de u et l'on a

$$\forall x > 0 \qquad L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$$

information qui reste à répercuter dans l'expression *supra* de $L(u'')$.

(*) C'est en réalité la fameuse méthode : « je calcule quelques premiers termes, je conjecture quelque chose, je récurre » !

b. Soit $x > 0$. Il est supposé que u est solution du fameux problème et nous en déduisons deux choses ;

– *primo*, l'égalité

$$L(u'') + 5L(u') + 6L(u) = L(v_0)$$

puisque

$$u'' + 5u' + 6u = v_0$$

où v_0 est l'application rencontrée lors de la question 4, en ayant pris soin d'y choisir précisément $a = 1$, et aussi parce que, depuis la question 3, L n'a pas oublié d'être linéaire. Cette même quatrième question nous ayant également appris que

$$L(v_0)(x) = \frac{1}{x+1}$$

nous pouvons peaufiner nos acquis en assénant carrément que

$$L(u'')(x) + 5L(u')(x) + 6L(u)(x) = \frac{1}{x+1}$$

– *deuzio*, les égalités

$$L(u')(x) = xL(u)(x) - 1 \quad \text{et} \quad L(u'')(x) = x^2L(u)(x) + 2 - x$$

puisque $u(0) = 1$ et $u'(0) = -2$.

Plaçons tout cela dans le *shaker* et agitons énergiquement. Après avoir fait un peu de ménage on trouve effectivement que

$$(x^2 + 5x + 6)L(u)(x) = \frac{1}{x+1} + 3 + x$$

Puisqu'il est évident que le réel

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

est ici non nul, nous en déduisons que

$$L(u)(x) = \frac{1}{(x+2)(x+3)}\left(\frac{1}{x+1} + 3 + x\right)$$

et l'obtention du résultat souhaité n'est qu'une affaire de manipulations de fractions rationnelles comme nous avons eu l'occasion de le faire en classe de troisième… Nous laissons donc à notre dévoué lecteur le soin de réussir cette nostalgique finalité.

11. Revenons faire un petit coucou aux fonctions v_i de la quatrième question qui, si cela ne dérange personne, seront ici notées $v_{i,a}$ pour bien indiquer leur dépendance au réel a. Les résultats de cette question permettent de reformuler l'ultime conclusion de la toute récente b en l'égalité fonctionnelle

$$L(u) = L\left(\frac{v_{0,1} + v_{0,3}}{2}\right)$$

ce qui va nous permettre de faire une petite pause.

L'objectif de la quatrième partie est clairement indiqué dans son chapeau. Il s'agit de la *recherche* d'une application u ayant des vertus diverses et variées et qui dit recherche dit, pourquoi pas, recours à une analyse synthèse. La question 10 et tout particulièrement son « on suppose » est typique de la démarche analytique à cela près que le texte la joue *tricky* en supposant l'existence d'une application u convenable dont la dérivée seconde appartient à E.

Au risque de radoter, la conclusion de cette fine analyse est la suivante. Si u est une application convenable dont la dérivée seconde appartient à E alors fatalement

$$L(u) = L\left(\frac{v_{0,1} + v_{0,3}}{2}\right) \tag{1}$$

et nous ne pouvons malheureusement pas aller plus loin puisque nous ne savons absolument rien de l'*injectivité* de la transformation de Laplace. C'est donc le moment de passer à la synthèse. Compte tenu des conclusions de l'analyse, nous devons bien évidemment proposer pour application u, l'une de celles qui vérifient l'égalité (1) et la moins improbable est à coup sûr

$$\tilde{u} = \frac{v_{0,1} + v_{0,3}}{2}$$

et il se trouve — miracle, miracle — qu'elle est parfaitement convenable. Nous laissons au lecteur dévoué le soin de se charger de cette pure formalité !

↱ Les *pros* des équations différentielles et des problèmes dits de Cauchy savent qu'en réalité $\tilde{u}$ est l'*unique* solution du problème posé mais cela restera entre nous…