Corrigé

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer *à Essec Business School.*

Problème 1

Avant toute chose, nous tenons à préciser que lorsque f appartient à E, $T(f)$ est effectivement une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Soit en effet $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ l'est, *a fortiori*, sur le *segment* $[x-1, x+1]$ et l'intégrale :

$$\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

se doit d'exister comme nous l'avons appris en classe de terminale. Tout est donc *under control*.

Partie 1

1. Soit $f \in E$. Gaston Darboux et Isaac Barrow assurent de concert l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad T(f)(x) = \frac{1}{2}\big(F(x+1) - F(x-1)\big)$$

La fonction F, primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ y hérite d'une authentique et méritée classe $\mathcal{C}^1$ qu'elle transmet directement à $T(f)$ *via* les théorèmes généraux. En outre et dérivée d'une primitive et d'une composition obligent, l'on a nettement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \big(T(f)\big)'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

puisque les dérivées des fonctions affines…

2. Nous devons, fatalement, nous organiser en deux temps.

– Soit $f \in E$, nous venons d'établir que l'application $T(f)$ appartient à E_1, ensemble qui, paraît-il(*), est inclus dans E. Autant dire alors que T applique bien E dans lui-même.

– Quant à sa linéarité, elle découle essentiellement de celle de l'intégration.

Nous avons ainsi effectivement :

$$T \in \mathcal{L}(E)$$

3. Lorsque, tout récemment, nous avons établi que T applique E dans lui-même, nous avons en réalité constaté que, pour toute $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E_1, ce que nous pouvons reformuler en disant tout bêtement que :

$$\mathrm{Im}\, T \subset E_1$$

Le texte nous a étonnamment rappelé que E_1 est inclus dans E, mais nul ne peut raisonnablement ignorer que cette inclusion est *stricte*, la classique preuve de celle

(*) Le texte rappelle de ces *scoops*…

allégation utilisant la fonction « valeur absolue » qui certes est continue sur $\mathbb{R}$ mais qui n'y jouiera jamais de la classe $\mathcal{C}^1$. Il devrait immédiatement s'ensuivre que :

$$\operatorname{Im} T \neq E$$

et T n'est définitivement pas surjectif.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et organisons-nous en deux temps.

– Supposons que f soit paire. Nous glissons allègrement sur la symétrie de $\mathbb{R}$ rapport à zéro et nous partons de :

$$T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{-x-1}^{-x+1} f(t)\,dt$$

Notre ami Trebogad(*) préfère plutôt le changement de variable $t = -u$ et signale, dans la foulée, que la fonction affine $u \mapsto -u$ réalise, à l'évidence, une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ du segment $[x-1, x+1]$ sur le segment $[-x-1, -x+1]$ à telle enseigne que, selon le théorème du changement de variable, nous avons :

$$T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{x+1}^{x-1} f(-u)\,(-du)$$

Après utilisation de la parité de f et remise des bornes dans le sens *ad hoc*, le *physio* reconnaît alors l'égalité :

$$T(f)(-x) = T(f)(x)$$

chronique d'une parité annoncée.

– Si l'on suppose maintenant que f est impaire, l'on se doute bien que l'aboutissement s'atteindra *mutatis mutandis*.

5. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale en question n'est impropre que deux fois et si l'on en croit l'important « test de la primitive » la fonction F que nous avons évoquée quelques lignes plus haut doit posséder une limite finie L en plus l'infini et une limite finie ℓ en moins l'infini. En conséquence et grâce aux théorèmes généraux sur les limites, nous avons :

– d'une part :

$$\frac{1}{2}\big(F(x+1) - F(x-1)\big) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{2}(L - L)$$

– d'autre part :

$$\frac{1}{2}\big(F(x+1) - F(x-1)\big) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \frac{1}{2}(\ell - \ell)$$

et autant dire alors effectivement que :

$$T(f)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad T(f)(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

(*) Dagobert en verlan, une métaphorique allusion aux trop nombreux changements de variables présentés à l'envers…

6. La fonction s est évidemment continue sur $\mathbb{R}$ et l'une de ses primitives n'est autre que l'application :

$$S : t \longmapsto -\frac{1}{\pi}\cos \pi t$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Comme nous l'avons déjà fait valoir plus haut, nous avons :

$$T(s)(x) = \frac{1}{2}\big(S(x+1) - S(x-1)\big) = \frac{1}{2\pi}\big(\cos \pi(x-1) - \cos \pi(x+1)\big)$$

et comme à l'évidence :

$$\pi(x+1) = \pi(x-1) + 2\pi$$

et que la fonction *cosinus* est 2π-périodique, il semble inéluctable que :

$$T(s)(x) = 0$$

Bref :

$$T(s) = 0$$

et cela montre que s appartient au noyau de T. En outre, s n'est assurément pas la fonction nulle puisque par exemple :

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

et voilà donc que :

$$\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$$

Notre pauvre endomorphisme T, qui n'était déjà pas surjectif, échappe également aux joies de l'injectivité. Décidément ce n'était pas son jour…

Partie 2

7. Soit a un nombre réel. La fonction f_a est notablement continue sur $\mathbb{R}$ et l'une de ses primitives F_a doit se négocier selon les valeurs de a. Nous proposons :

$$F_a : t \longmapsto \frac{e^{at}}{a} \quad \text{lorsque} \quad a \neq 0$$

et :

$$F_a : t \longmapsto t \quad \text{lorsque} \quad a = 0$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ et organisons-nous en deux temps.

– Si $a \neq 0$, on trouve sans problème :

$$T(f_a)(x) = \frac{e^{a(x+1)} - e^{a(x-1)}}{2a}$$

– Si $a = 0$, on parvient de même à :

$$T(f_a)(x) = 1$$

8. Combien de points pour cette question ?

9. Les généreux théorèmes généraux donnent déjà φ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et l'on découvre aisément que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \qquad \varphi'(a) = \frac{(a-1)e^a + (a+1)e^{-a}}{2a^2}$$

Soit désormais a différent de zéro. Nous nous penchons maintenant sur le taux de Newton qui est au cœur du débat et nous avons :

$$\frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} = \frac{e^a - e^{-a} - 2a}{2a^2}$$

Comme il fallait s'y attendre, cette quantité présente une forme indéterminée en zéro et vu sa tête, nul ne peut ignorer que le secret de son comportement passe par le développement limité à l'ordre 2 de son numérateur. *Here we go !*

Nous savons par cœur qu'au voisinage de zéro :

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2} + o(a^2) \quad \text{et} \quad e^{-a} = 1 - a + \frac{a^2}{2} + o(a^2)$$

d'où ressort quasi mentalement l'égalité :

$$e^a - e^{-a} - 2a = o(a^2)$$

Il en résulte immédiatement que :

$$\frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} \xrightarrow[a \to 0]{} 0$$

et il se trouve que φ est bel et bien dérivable en zéro et qu'en prime :

$$\varphi'(0) = 0$$

Bref, l'application φ est, comme ils l'affirment, dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(a) = \begin{cases} \dfrac{(a-1)e^a + (a+1)e^{-a}}{2a^2} & \text{si} \quad a \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad a = 0 \end{cases}$$

Poursuivons en notant u l'application clairement définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad u(a) = (a-1)e^a + (a+1)e^{-a}$$

Elle est bien entendu dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on trouve facilement :

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad u'(a) = a(e^a - e^{-a})$$

Il s'ensuit alors aisément le tableau de variation :

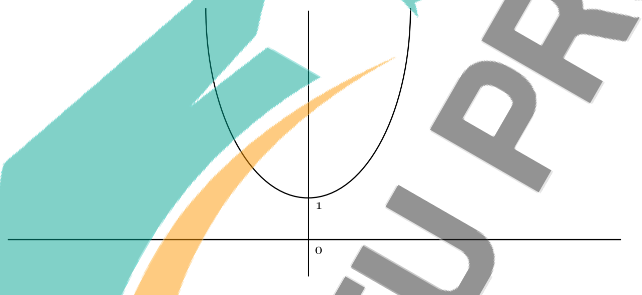
a	$-\infty$		0		$+\infty$
u'		$+$	0	$+$	
u		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
φ'		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

les limites en plus et moins l'infini de φ procédant essentiellement de la très classique prépondérance :

$$\frac{e^t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

La représentation graphique ne se fait alors plus attendre, la lumineuse parité de l'application φ apportant un peu de précision à la qualité de notre dessin…

Here you are !



10. Il résulte, classiquement, de l'étude précédente et du théorème des valeurs intermédiaires de Bernhard Bolzano que :

$$\varphi(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$$

Soit maintenant λ appartenant à $[1, +\infty[$. Vu ce que nous venons d'affirmer, il existe un réel a tel que :

$$\lambda = \varphi(a)$$

et la terrible question 8 assure alors que :

$$T(f_a) = \lambda f_a$$

et comme à l'évidence f_a n'est pas la fonction nulle…

↱ Dommage que le texte n'ait pas envisagé les choses sous l'angle de la *propreté* car il vient en réalité d'être justifié que :

$$[1, +\infty[\subset \operatorname{Spec} T$$

Partie 3

11. Nous avons déjà rappelé que la fonction « valeur absolue » est continue sur $\mathbb{R}$, nous affirmons que l'application :

$$t \longmapsto 1 + |t|$$

ne s'annule visiblement jamais et cela devrait être suffisant pour justifier l'appartenance à E de la fonction h.

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. C'est quoi qu'il arrive que nous avons :

$$T(h)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{1+|t|}$$

Respectueux des histoires de *parité*, nous obéissons au texte et nous nous organisons en conséquence.

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, l'on a bien sûr :

$$x - 1 \leqslant 0 \leqslant x + 1$$

La gestion de la valeur absolue nous oblige, bien entendu, à *chasler* en zéro de telle manière que :

$$T(h)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{0} \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+1} \frac{dt}{1+t}$$

Le calcul se termine aisément et l'on trouve :

$$T(h)(x) = \frac{1}{2}\ln\left(4 - x^2\right)$$

- Si $x > 1$, nous avons cette fois :

$$0 < x - 1 < x + 1$$

et l'on a alors *absolument :*

$$T(h)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\left(\ln(2+x) - \ln x\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

Nous venons donc de calculer $T(h)(x)$ pour tous les x positifs mais en vérité le texte demande ce calcul pour tous les x réels. La remarque du texte est fondée, la fonction h est indéniablement paire, parité qui, si l'on en croit la question 4, est automatiquement transmise à sa copine $T(h)$. Bref :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad T(h)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left(4 - x^2\right) & \text{si} \quad |x| \leqslant 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \dfrac{2}{|x|}\right) & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

12. Comme nous l'avons déjà dit, $T(h)$ est une fonction paire. Il suffit donc de mener son étude du côté de la positivité et grâce à la question 1 et à quelques *facéties*, l'on trouve aisément :

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \big(T(h)\big)'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-4} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\[2ex] \dfrac{-1}{x(x+2)} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Cette dérivée étant ouvertement négative, les variations de $T(h)$ sur $\mathbb{R}_+$ sont consignées dans le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$\big(T(h)\big)'$		$-$	
$T(h)$	$\ln 2$	$\searrow$	0

la valeur en zéro et la limite en plus l'infini n'étant que de très tranquilles formalités.

Les équations des deux tangentes en question sont très faciles à débusquer :

– en zéro, on trouve :

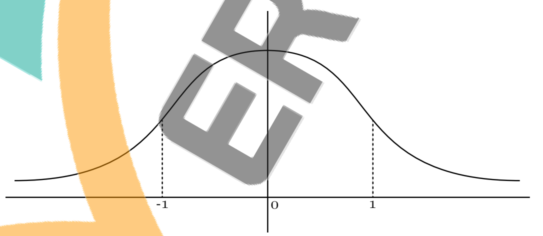
$$y = \ln 2$$

fingers in the nose ;

– quant à celle au point 1, il s'agit de :

$$y = -\frac{x-1}{3} + \frac{1}{2}\ln 3$$

Le graphe tant attendu ne demande alors qu'à éclore. *Here it is*.



↱ Si l'on a le courage de pousser jusqu'à la dérivation seconde, l'on constate aisément que $T(h)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et qu'en chaque point -1 et 1 elle possède des dérivées secondes à droite et à gauche différentes. En outre, en observant le signe de notre dérivée seconde, l'on apprend facilement que $T(h)$ est une fonction convexe sur chacune des demi-droites :

$$]-\infty, -1] \quad ; \quad [1, +\infty[$$

alors qu'elle est concave sur le segment $[-1,1]$. Les deux points d'abscisse -1 et 1 sont donc des inflexions de $T(h)$ mais, une fois n'est pas coutume, la dérivée seconde ne s'y annule pas…

Ces précieuses informations ont bien sur permis de peaufiner le tracé de notre graphe.

13. La fonction h est continue sur $[0,+\infty[$, elle y a pour primitive l'application :

$$t \longmapsto \ln(1+t)$$

et cette primitive n'a sûrement pas de limite finie en plus l'infini, pour la simple et bonne raison que :

$$\ln(1+t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

Le test de la primitive est alors formel. L'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} h(t)dt$$

n'a pas les moyens d'exister, pas plus, *a fortiori*, que sa cousine :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$$

Cependant, et *because* l'évidente limite :

$$\frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{2}{x}\Big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

nous n'avons aucun mal à clamer haut et fort que :

$$T(h)(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

et la réciproque en question est plutôt dans les choux…

Partie 4

Pour alléger un peu l'atmosphère, nous adopterons la notation :

$$U =]1,+\infty[\times]1,+\infty[$$

et nous commençons par une nécessaire mise au point. Notons :

$$U_1 = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \mid\ x>1\Big\} \quad \text{et} \quad U_2 = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \mid\ y>1\Big\}$$

Ce sont les images réciproques respectives de l'ouvert $]1,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ par les deux applications coordonnées dont la continuité sur $\mathbb{R}^2$ était déjà connue de l'arrière grand-mère de Mathusalem. Il s'agit à ce titre de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, un certain Felix Hausdorff n'étant d'ailleurs pas totalement étranger à nos allégations.

Étant donné que :

$$U = U_1 \cap U_2$$

le même Felix assure l'*ouverture* du futur domaine de définition de H, ce qui, pour oser parler sérieusement de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$, est tout de même la moindre des choses…

Notons également que, lorsque (x, y) appartient à U, le produit xy est strictement plus grand que 1 et H est donc définitivement bien définie sur U.

Nous pouvons désormais envisager la suite.

14. Soit $(x, y) \in U$. L'on a vite fait de constater que :

$$H(x, y) = \ln(x+2) + \ln(y+2) + \ln x + \ln y - 2\ln(xy+2)$$

Puisque les deux applications :

$$(x, y) \longmapsto x \quad \text{et} \quad (x, y) \longmapsto y$$

sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur U — ce sont précisément les deux applications coordonnées dont nous parlions il y a un instant — et que sur U les cinq fonctions :

$$(x, y) \longmapsto x+2 \quad ; \quad (x, y) \longmapsto y+2 \quad ; \quad (x, y) \longmapsto x \quad ; \quad (x, y) \longmapsto y$$

et :

$$(x, y) \longmapsto 2 + xy$$

sont à valeurs *strictement* positives, les théorèmes généraux donnent la fonction H de classe $\mathcal{C}^2$ sur U puisque c'est le cas de la fonction $\ln$ mais sur $\mathbb{R}_+^*$ s'entend.

On trouve ensuite aisément que :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2y}{xy+2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} - \frac{2x}{xy+2}$$

15. Nous rappelons qu'il est fortement conseillé de mener la recherche des points critiques comme une analyse-synthèse. Soit donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

– Supposons que (x, y) soit critique pour H. Cela signifie que (x, y) appartient à U et que :

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} = \frac{2y}{xy+2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} = \frac{2x}{xy+2}$$

On multiplie la première par x, la seconde par y et l'on en déduit transitivement que :

$$\frac{x}{x+2} + 1 = \frac{y}{y+2} + 1$$

égalité de laquelle il ressort facilement que :

$$x = y$$

On répercute ensuite dans la première ce qui révèle assez rapidement que :

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

et comme nous n'avons pas oublié la panoplie de la classe de première, il devrait s'ensuivre que :

$$x = 1 + \sqrt{3}$$

puisque l'autre racine n'est ni au bon moment, ni au bon endroit…

Il résulte de cette analyse que le seul point critique potentiel est :

$$\left(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$$

– Le point $\left(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$ appartient ouvertement à U et ce n'est qu'une formalité que de vérifier qu'il annule nos deux dérivées partielles, ce que nous laissons au soin de notre *dévoué* lecteur !

Bref, la fonction H n'a effectivement qu'un seul point critique qui n'est autre que :

$$\left(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$$

16. Il semble que, lors de la quatorzième, nous ayons établi la classe $\mathcal{C}^2$ de H sur U et nous ne voyons donc pas la raison de l'admettre. Notons également que des valeurs approchées sans *aucune* indication de marges d'erreurs sont des données *inexploitables* et il va donc impérativement falloir passer au calcul exact.

Soit à nouveau $(x, y) \in U$. On trouve aisément :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2y^2}{(xy+2)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x^2}{(xy+2)^2} - \frac{1}{(y+2)^2} - \frac{1}{y^2}$$

puis :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{2}{(xy+2)^2}$$

La suite des événements n'est pas vraiment drôle et c'est la raison pour la quelle nous laissons à notre *cannibal lecteur* le soin de dévorer le calcul des valeurs de ces *zozos* au point critique en question. Il trouvera tout d'abord :

$$r = t = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{7}{6} \quad \text{et} \quad s = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}$$

et ensuite :

$$rt - s^2 = -\frac{3}{18\left(45 + 26\sqrt{3}\right)}$$

Oui mais voilà, puisque visiblement :

$$rt - s^2 < 0$$

la fonction H ne présente pas d'extremum local au point critique :

$$\left(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$$

et elle y présenterait plutôt une configuration de *col*.

Enfin, et pour répondre complètement à la question, signalons qu'une importante condition nécessaire du premier ordre, stipule qu'un extremum local de H sur l'ouvert U ne peut avoir lieu qu'en un point critique et comme H n'en a qu'un…

Bref, la fonction H n'a désespérément aucun extremum local sur U. Tout ça pour ça…

Partie 5

17. Soit A et B deux nombres réels. Considérons les deux fonctions :

$$u : x \longmapsto T(f)(x) \quad \text{et} \quad v : x \longmapsto x$$

Elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A, B]$ — depuis peu il est vrai pour la première — et l'on a :

$$\forall x \in [A, B] \qquad u'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big) \quad \text{et} \quad v'(x) = 1$$

Ainsi, selon la formule d'intégration par parties, voilà tout d'abord que :

$$\int_A^B T(f)(x)dx = \Big[xT(f)(x)\Big]_A^B - \frac{1}{2}\int_A^B x\big(f(x+1) - f(x-1)\big)dx$$

et il s'agit maintenant d'y aller en douceur.

– Nous avons tout d'abord :

$$\Big[xT(f)(x)\Big]_A^B = \frac{B}{2}\int_{B-1}^{B+1} f(x)dx - \frac{A}{2}\int_{A-1}^{A+1} f(x)dx$$

– Grâce à un *chouia* de linéarité, nous avons ensuite :

$$\int_A^B x\big(f(x+1) - f(x-1)\big)dx = \int_A^B xf(x+1)dx - \int_A^B xf(x-1)dx$$

Au *right hand side* nous proposons les changements de variables $x = u - 1$ dans la première intégrale et $x = u + 1$ dans la seconde, changements *affines* qui ne sont pas plus difficiles à justifier que la quadrature du carré, et *boum badamoum :*

$$\int_A^B x\big(f(x+1) - f(x-1)\big)dx = \int_{A+1}^{B+1} (u-1)f(u)du - \int_{A-1}^{B-1} (u+1)f(u)du$$

Un mini réarrangement des choses utilisant à coup sûr quelques soupçons de linéarité transforme maintenant le côté droit en :

$$\int_{A+1}^{B+1} uf(u)du - \int_{A-1}^{B-1} uf(u)du - \int_{A+1}^{B+1} f(u)du - \int_{A-1}^{B-1} f(u)du$$

et en entonnant tous en chœur : « *chaslons enfants de la patrie* » voilà aisément que :

$$\int_{A+1}^{B+1} uf(u)du - \int_{A-1}^{B-1} uf(u)du = \int_{B-1}^{B+1} uf(u)du - \int_{A-1}^{A+1} uf(u)du$$

puisque de façon très schématique :

$$\int_{A-1}^{A+1} + \int_{A+1}^{B+1} = \int_{A-1}^{B-1} + \int_{B-1}^{B+1}$$

Il suffit alors de remettre tout ce petit monde à sa place, de continuer encore et toujours de linéariser ce qui est linéarisable et l'inégalité souhaitée est acquise mais, *as usual*, nous demandons au lecteur suspicieux de se charger de l'intendance.

18. Soit $B \in \mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire intégrale assure déjà que :

$$\left|\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} |B-x|f(x)dx$$

la *densitaire* positivité de f et la position géographique des bornes n'étant pas totalement étrangères à l'affaire. Soit alors x appartenant au segment $[B-1, B+1]$. Nous avons donc :

$$|B-x| \leqslant 1 \quad \text{puis} \quad |B-x|f(x) \leqslant f(x)$$

puisque, au risque de radoter, les densités sont rarement négatives... L'intégration étant croissante, il s'en déduit(*) transitivement :

$$\left|\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} f(x)dx$$

puisqu'entre temps, les bornes n'ont pas changé d'âne. Il ne reste alors qu'à réveiller le *physio*...

Poursuivons. Étant donné que f est une densité, son intégrale sur $\mathbb{R}$ existe, et la cinquième question assène catégoriquement que $T(f)$ tend vers zéro en plus l'infini. Le *squeezing process* peut alors prendre le relais et *vlan !*

$$\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x)dx \xrightarrow[B\to+\infty]{} 0$$

↱ Puisque la question 5 fonctionne également en moins l'infini, c'est bien sûr *mutatis mutandis* que l'on obtiendra :

$$\frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1} (A-x)f(x)dx \xrightarrow[A\to-\infty]{} 0$$

Nous essaierons de nous en souvenir dans quelques instants.

(*) *Comme cochon !*

19. Nous avons quatre points à passer en revue.

– La fonction $T(f)$ est tout d'abord parfaitement définie sur $\mathbb{R}$ et ce, depuis la genèse de ce texte.

– Vu que f est *densitairement* positive sur $\mathbb{R}$, sa copine $T(f)$ l'est également puisque l'intégration est croissante quand les bornes le veulent bien.

– Depuis la toute première question, l'application $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nous n'allons pas nous en plaindre car nous étions prêts à lui tolérer une nombre fini de *bugs*.

– Il reste alors à causer d'intégrale sur $\mathbb{R}$, intégrale qui, à bien y regarder, n'est impropre que deux fois. Il nous faut donc étudier séparément :

$$\int_0^{+\infty} T(f)(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{0} T(f)(x)dx$$

– Soit B un réel positif. Grâce à un choix qui s'impose et à la précédente question, nous avons :

$$\int_0^{B} T(f)(x)dx = I_B + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xf(x)dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{B+1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{B-1} f(x)dx$$

où, histoire d'alléger un peu les écritures, nous avons noté I_B la vieille connaissance :

$$\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)dx$$

Nous venons d'apprendre que cette dernière tend vers zéro quand B tend vers plus l'infini et densité oblige nous avons également :

$$\int_1^{B+1} f(x)dx \xrightarrow[B\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{B-1} f(x)dx \xrightarrow[B\to+\infty]{} \int_{-1}^{+\infty} f(x)dx$$

Il s'ensuit immédiatement que l'intégrale sur $[0,+\infty[$ de $T(f)$ existe et que :

$$\int_0^{+\infty} T(f)(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xf(x)dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{+\infty} f(x)dx$$

– On démontre *mutatis mutandis* que l'intégrale sur $]-\infty,0]$ de $T(f)$ existe également et que :

$$\int_{-\infty}^{0} T(f)(x)dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xf(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx$$

La morale de l'histoire est que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de $T(f)$ existe et que, après quelques aménagements et autres magiques simplifications, l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(f)(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

et comme f est une densité…

Problème 2

La famille $(V_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est *officiellement* la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Quant à la famille double :

$$(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

il s'agit de la base consacrée et canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et il n'y a donc rien à admettre ! Nous en profitons pour rappeler que les E_{ij} sont ici les fameuses « unités matricielles » du format (n,n) et qu'il en existe aussi pour les formats rectangulaires. Notons enfin que certains auteurs les notent e_{ij}.

Partie 1

1. Nous devons nous organiser en deux temps.

– Soit M appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Les formats respectifs autorisent les deux produits matriciels AM et MA qui se trouvent être encore carrés (n,n), tout comme la différence :

$$AM - MA$$

et Φ_A applique donc bien $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

– Quant à la linéarité de Φ_A, elle repose essentiellement et mentalement sur la distributivité à droite et à gauche du produit matriciel par rapport à la somme.

Nous avons donc effectivement :

$$\Phi_A \in \mathcal{L}\big(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\big)$$

↱ L'opérateur Φ_A est bien connu dans la littérature mathématique. Il s'appelle « opérateur de Sophus Lie » attaché à la matrice A.

2. Il semble que :

$$\Phi_A(I_n) = 0$$

et comme assurément I_n n'est pas nulle, il s'avère que :

$$\mathrm{Ker}\,\Phi_A \neq \{0\}$$

L'endomorphisme Φ_A ne goûtera donc pas aux joies de l'injectivité ! Du coup, il ne goûtera pas non plus à celles de la surjectivité puisque, l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, cela contrarierait drôlement l'importante caractérisation des automorphismes en dimension finie…

Partie 2

3. Étrange ce « et », très étrange ! Il semble en effet impératif de *commencer* par les valeurs propres de A. À cet effet, nous avons à n'en pas douter :

$$\mathrm{Spec}\,A = \{1,3\}$$

puisque les valeurs propres des matrices trigonales se calculent avec les mirettes. Du coup, la matrice A est d'ordre 2 et possède *désormais* deux valeurs propres réelles et *différentes*. Un importante condition suffisante — *the sufficient condition* de diagonalisation — termine alors l'affaire.

4. Après quelques poétiques produits matriciels, *as usual* laissés à la charge de l'impétrant, et grâce à une parfaite maîtrise du protocole de « matricialisation » on trouve :

$$\mathtt{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons H cette matrice et $C_1, \ldots, C_4$ ses différentes colonnes. Comme :

$$C_1 = -C_4 \quad \text{et} \quad C_2 = -2C_4$$

et comme la famille (C_3, C_4) est mentalement libre, nous crions haut et fort que :

$$\mathtt{rg}\, H = 2$$

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le lecteur constatera aisément que les deux opérations élémentaires :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad ; \quad L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1$$

font passer de la matrice $H - \lambda I_4$ à la matrice *up-trigonal* :

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & -(\lambda+2) & 0 & 1 \\ 0 & \lambda(\lambda+2) & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

et il en résulte en un tournemain que :

$$\mathtt{Spec}\, H = \{-2, 0, 2\}$$

L'espace propre $\mathsf{E}_0(H)$ n'est autre que le noyau de H et si l'on en croit monsieur *du rang* :

$$\mathtt{dim}\, \mathsf{E}_0(H) = 4 - \mathtt{rg}\, H = 2$$

la dernière égalité provenant de la fin de la précédente.

Pour terminer l'affaire nous nous appuierons sur deux importantes vérités :

– *Primo*, un espace propre n'est *jamais* nul. Il en résulte donc que :

$$\mathtt{dim}\, \mathsf{E}_{-2}(H) \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \mathtt{dim}\, \mathsf{E}_2(H) \geqslant 1$$

– *Deuzio*, selon l'importante règle du non-dépassement(*), nous avons dans le cas présent :

$$\mathtt{dim}\, \mathsf{E}_{-2}(H) + \mathtt{dim}\, \mathsf{E}_0(H) + \mathtt{dim}\, \mathsf{E}_2(H) \leqslant 4$$

(*) Pour une matrice M d'ordre n une somme de dimensions d'espaces $\mathsf{E}_\lambda(M)$ attachés à des λ *différents* ne peut jamais dépasser l'entier n.

et tout cela oblige inéluctablement que :

$$\dim \mathsf{E}_{-2}(H) + \dim \mathsf{E}_0(H) + \dim \mathsf{E}_2(H) = 4$$

et une classique *cns* de diagonalisation — celle du comptable pour les initiés — assure alors que la matrice H est diagonalisable.

Comme H est l'une des matrices de l'endomorphisme Φ_A nous en déduisons que :

$$\mathsf{Spec}\,\Phi_A = \{-2, 0, 2\}$$

et que Φ_A est effectivement diagonalisable.

Partie 3

6. Il est dit par définition qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Grâce au *dressing undressing principle*, la transposition de cette égalité donne :

$$A^{\mathsf{T}} = \left(P^{-1}\right)^{\mathsf{T}} \cdot D \cdot P^{\mathsf{T}}$$

puisque le matrices diagonales sont ouvertement symétriques. En outre, puisque la transposition et l'inversion font un très bon ménage — transposée de l'inverse, inverse de la transposée même combat ! — nous avons également :

$$A^{\mathsf{T}} = \left(P^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \cdot D \cdot P^{\mathsf{T}}$$

et la matrice A^{T} devient ainsi semblable à la diagonale D. Autant dire alors, par définition, que A^{T} est déjà diagonalisable. Enfin, comme il est bien connu que deux matrices semblables ont le même spectre, les valeurs propres de A^{T} sont exactement les mêmes que celles de D et comme ces dernières sont aussi celles de A…

7. Notons λ la valeur propre de A attachée au vecteur propre X et μ celle de A^{T} attachée au vecteur Y. La *colimatrice*(*) $X \cdot Y^{\mathsf{T}}$ appartient à $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ et nous avons :

$$\Phi_A\left(X \cdot Y^{\mathsf{T}}\right) = A \cdot X \cdot Y^{\mathsf{T}} - X \cdot Y^{\mathsf{T}} \cdot A$$

Vu les dispositions que nous avons adoptées, nous avons :

$$A \cdot X = \lambda X \quad \text{et} \quad A^{\mathsf{T}} \cdot Y = \mu Y$$

un joli coup de *dup* transforme la seconde en :

$$Y^{\mathsf{T}} \cdot A = \mu Y^{\mathsf{T}}$$

(*) C'est le nom que nous donnons aux matrices carrées — ou même rectangulaires — qui sont le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne.

et voilà donc au bout du compte que :

$$\Phi_A\big(X \cdot Y^{\mathsf{T}}\big) = (\lambda - \mu) X \cdot Y^{\mathsf{T}}$$

Tout cela est déjà bien parti, mais attention ce n'est pas fini ! Pour véritablement conclure encore faut-il — *never forget !* — que notre *colimatrice* ne soit pas nulle.

Vu que X et Y sont des vecteurs propres, la colonne X et la ligne Y^{T} ne sont certes pas nulles mais les *intégristes* de tout bord savent que cela n'est pas complètement suffisant puisqu'il y a, dans le monde, des palanquées de matrices *non nulles* dont le produit est misérablement *nul*.

Oui mais voilà, ce phénomène est totalement impossible lorsqu'il s'agit du produit d'une *colonne C non nulle* par une *ligne L non nulle*, on parle même parfois de « *cl-intégrité* ».

En effet, l'une des entrées c_i de la colonne C est non nulle et l'une des entrées ℓ_j de L l'est également et comme :

$$(CL)_{ij} = c_i \ell_j$$

le produit CL n'est pas nul *and Bob's your uncle !*

↱ Non seulement $X \cdot Y^{\mathsf{T}}$ est désormais vecteur propre de Φ_A, mais la valeur propre attachée est la différence $\lambda - \mu$.

8. Soit i et j deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Bases de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ obligent, il existe des scalaires :

$$a_1, \ldots, a_n \quad ; \quad b_1, \ldots, b_n$$

tels que :

$$V_i = \sum_{h=1}^{n} a_h X_h \quad \text{et} \quad V_j = \sum_{k=1}^{n} b_k Y_k$$

et la transposition étant linéaire, il s'ensuit également que :

$${V_j}^{\mathsf{T}} = \sum_{k=1}^{n} b_k {Y_k}^{\mathsf{T}}$$

Le développement du produit $V_i \cdot {V_j}^{\mathsf{T}}$ est alors immédiat et voilà donc que :

$$V_i \cdot {V_j}^{\mathsf{T}} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_h b_k \, X_h \cdot {Y_k}^{\mathsf{T}}$$

ce qui est déjà une excellente nouvelle.

Vu la définition de l'unité matricielle E_{ij}, il semble que nous venions d'établir que :

$$E_{ij} \in \mathsf{Vect}\,(\mathcal{F})$$

Faisons alors un petit bilan. Toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est évidemment combinaison linéaire des matrices E_{ij} de sa base canonique et ces dernières sont, à leur tour, combinaison linéaire des matrices de la famille $\mathcal{F}$. On en déduit ainsi — on parle parfois de transitivité des combinaisons linéaires — que toute matrice de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire des matrices de la famille $\mathcal{F}$ et autrement dit :

$$\mathsf{M}_n(\mathbb{R}) = \mathsf{Vect}\,(\mathcal{F})$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc désormais génératrice de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ et elle est providentiellement formée de n^2 vecteurs, l'entier n^2 étant justement la dimension de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Il ne reste plus qu'à ne pas avoir oublié la cruciale caractérisation des bases en dimension finie.

9. Comme A est diagonalisable, la *cns* de la base propre produit une base :

$$(X_1, \ldots, X_n)$$

de $\mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de A. Nous avons récemment établi que la transposée de A est elle-même diagonalisable et pour la même raison, nous disposons également d'une base :

$$(Y_1, \ldots, Y_n)$$

de $\mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée cette fois de vecteurs propres de A^{T}.

Nous faisons maintenant valoir deux choses.

– D'après la septième question toutes les matrices de type :

$$X_i \cdot {Y_j}^{\mathsf{T}} \quad \text{où} \quad (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$

sont des vecteurs propres de Φ_A.

– D'après la huitième, la famille :

$$\mathcal{F} = \left(X_i \cdot {Y_j}^{\mathsf{T}}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

est une base de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc une base de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de Φ_A ce qui déclenche, pour la troisième fois, la *cns* de la base propre. L'endomorphisme Φ_A est donc bel et bien diagonalisable.

10. Notons :

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

la liste des valeurs propres respectivement attachées aux vecteurs propres $(X_1, \ldots, X_n)$ de la précédente question et notons :

$$(\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

celle des valeurs propres attachées aux vecteurs propres $(Y_1, \ldots, Y_n)$. Il ne fait aucun doute que les λ_i sont *les* valeurs propres de A et que les μ_j sont celles de A^{T}, autrement dit exactement celles de A, puisque nous n'avons pas oublié la question 6.

Soit alors i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. La précieuse remarque que nous avons faite à la fin de la question 7 tombe à pic. Elle révèle que $(\lambda_i - \mu_j)$ est la valeur propre de Φ_A

attachée au vecteur propre $X_i \cdot {Y_j}^{\mathsf{T}}$. La matrice de Φ_A dans la base propre $\mathcal{F}$ est donc la diagonale dont les éléments diagonaux sont toutes les différences :

$$\lambda_i - \mu_j$$

où i et j parcourent l'ensemble $[\![1, n]\!]$. *So...*

↱ Cela est en pure conformité avec ce que nous avons trouvé lors de la question 5. Nous avions en effet :

$$\operatorname{Spec} A = \{1, 3\}$$

et les fameuses différences sont ici :

$$1 - 1 = 0 \quad ; \quad 1 - 3 = -2 \quad ; \quad 3 - 1 = 2 \quad ; \quad 3 - 3 = 0$$

all's well that ends well !

Partie 4

11. Il est demandé de récurrer, récurrons !

• Lorsque $k = 0$, il n'y a pas grand-chose à prouver puisque $T^0 = I_n$ et que depuis peu, nous avons :

$$\Phi_A(I_n) = 0$$

• Supposons que la propriété soit établie pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$, ce qui devrait s'écrire :

$$A \cdot T^k - T^k \cdot A = \lambda k\, T^k$$

Multiplions alors à droite par la matrice T. Il advient ainsi que :

$$A \cdot T^{k+1} - T^k \cdot A \cdot T = \lambda k\, T^{k+1}$$

et comme il est *hypothétiquement* dit que :

$$A \cdot T = T \cdot A + \lambda T$$

il s'ensuit quasi mentalement que :

$$A \cdot T^{k+1} - T^{k+1} \cdot A = \lambda(k+1)\, T^{k+1}$$

et nous pouvons envisager la suite.

12. Supposons par l'absurde que, pour tout $k \in [\![1, n^2]\!]$, l'on ait :

$$T^k \neq 0$$

Comme I_n n'est ici évidemment pas nulle, c'est en réalité pour *tous* les entiers k vérifiant :

$$0 \leqslant k \leqslant n^2$$

que la matrice T^k n'est pas nulle. Bref :

$$\forall k \in [\![0, n^2]\!] \qquad \Phi_A(T^k) = \lambda k\, T^k \quad \text{et} \quad T^k \neq 0$$

et voilà donc, en définitive, que les réels λk, l'entier k se dandinant de 0 à n, sont des valeurs propres de Φ_A.

Oui mais voilà, vu que λ est donné *non nul*, ces réels λk sont deux à deux *distincts* et s'il nous est encore donné de savoir bien compter, il devrait y en avoir $n^2 + 1$.

L'endomorphisme Φ_A aurait donc $n^2 + 1$ valeurs propres distinctes alors qu'il opère dans l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont la dimension est légendairement n^2. L'apagogie(*) est ainsi à son apogée et il existe donc bien un entier q vérifiant :

$$1 \leqslant q \leqslant n^2$$

tel que :

$$T^q = 0$$

↱ Nous venons d'établir que tout vecteur propre de Φ_A attaché à une valeur propre *non nulle* est une matrice nilpotente.

13. On observe que l'existence d'un tel entier p n'est pas totalement anodine.

Elle repose, précisément, sur l'important théorème dit « de la première fois » selon lequel toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. En effet, la partie de $\mathbb{N}$ que voici :

$$\{m \in \mathbb{N} \mid T^m = 0\}$$

n'est pas vide puisqu'elle contient au moins l'entier q de la précédente et d'après le *first time theorem* elle dispose d'un plus petit élément que nous nommons justement p. Il reste à signaler que p ne peut évidemment pa être nul et que, minimum oblige, nous avons bel et bien :

$$T^p = 0 \quad \text{et} \quad T^{p-1} \neq 0$$

↱ Cet entier p est bien connu. Il s'appelle « indice de nilpotence » de la matrice T.

Excusez maintenant cette petite appartée concernant, chemin faisant, les fameuses *identifications* que pratiquent les algébristes et qui sont très souvent au cœur de certains débats.

– Cela commence par l'*identification* d'une matrice $(1,1)$ à l'unique scalaire qu'elle renferme, ce qui se traduit par les égalités :

$$\forall a \in \mathbb{K} \qquad [a] = a \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \tag{ID$_1$}$$

– Cela se poursuit un peu plus tard en *identifiant* les listes de $\mathbb{K}^n$ aux colonnes correspondantes de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et les retombées ont ici le *look* :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \tag{ID$_2$}$$

(*) On rappelle qu'en dimension finie un spectre est toujours fini et de cardinal inférieur ou égal à la dimension ambiante.

– Nous terminons maintenant par une identification, moins répandue, mais qui fait de plus en plus son chemin, qui consiste à *confondre* toute matrice M de format (n, p) à l'application linéaire :

$$\mu : \mathsf{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
$$X \longmapsto M \cdot X$$

dite *canoniquement* attachée à la matrice M. Cela revient ici à décider *manu militari* des égalités :

$$\mathsf{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathcal{L}\big(\mathsf{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big) = \mathcal{L}\big(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\big) \qquad (\text{ID}_3)$$

en ayant, dans la foulée et parce que nous le valons bien, usé de la seconde identification.

Il est clair que toutes les égalités que nous venons d'écrire lors des rubriques (ID_1), (ID_2) et (ID_3) sont de pures monstruosités ou même pire, mais elles s'avèrent *inoffensives* car il y a bien sûr de l'*isomorphie*(*) entre les uns et les autres, c'est-à-dire de l'isomorphie entre les premiers objets et les objets auxquels on les identifie. En outre, l'on s'en doute bien, ces identifications sont très pratiques et ont l'immense privilège de rendre les choses souvent plus lumineuses.

Revenons maintenant à nos ovins, en utilisant la troisième identification.

Comme la matrice T^{p-1} n'est pas nulle, l'application linéaire :

$$X \longmapsto T^{p-1} \cdot X$$

à laquelle nous venons de l'identifier ne l'est pas non plus et il existe donc effectivement une colonne $X \in \mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, telle que :

$$T^{p-1} \cdot X \neq 0$$

↱ Il eut été évidemment possible de donner une preuve manuelle de cette existence, mais c'eut été avouer la méconnaissance des isomorphismes — officiels ! — que nous avons évoqués plus haut, et il n'est jamais très bon de révéler de telles choses…

Poursuivons en notant que la famille en question est assez clairement intérieure à $\mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et c'est déjà une très bonne chose. Soit alors $a_0, \ldots, a_{p-1}$, des scalaires vérifiant :

$$a_0 X + a_1 T \cdot X + \cdots + a_{p-1} T^{p-1} \cdot X = 0 \qquad (\text{TL})$$

et supposons, avec Hyppocrate de Chios, que nos scalaires ne soient pas tous nuls. L'ensemble :

$$\Big\{ i \in [\![0, p-1]\!] \;\mid\; a_i \neq 0 \Big\}$$

n'est donc pas vide et — *first time theorem again* — il possède un plus petit élément que nous nommons i_0. Dans ces *minimales* conditions il ne fait aucun doute que non seulement i_0 appartient à l'ensemble $[\![0, p-1]\!]$ mais qu'aussi l'égalité (TL) se raccourcit notablement en :

$$a_{i_0} T^{i_0} \cdot X + \cdots + a_{p-1} T^{p-1} \cdot X = 0 \qquad (\text{TLR})$$

(*) C'est d'ailleurs l'occasion, si ce n'est déjà fait, de mesurer la puissance de la notion d'isomorphisme…

Vu que $i_0 \leqslant p-1$, le nombre $p-1-i_0$ est un entier positif et nous avons tout loisir de multiplier, l'égalité raccourcie, à gauche par la matrice T^{p-1-i_0} ce qui amène à :

$$a_{i_0} T^{p-1} \cdot X = 0$$

puisque T^p et ses *sur-acolytes* sont carrément nuls. Oui mais voilà, il est dit quelque part que :

$$a_{i_0} \neq 0 \quad \text{et} \quad T^{p-1} \cdot X \neq 0$$

chronique d'une contradiction fortement espérée. Notre famille est désormais libre dans un espace vectoriel de dimension n et comme elle est visiblement de longueur p...

Partie 5

La matrice A est ici *symétrique réelle* d'ordre supérieur ou égal à un et elle est, à ce titre, *spectralement* diagonalisable. L'existence de l'orthogonale P est donc bel et bien à l'ordre du jour. Merci, théorème spectral !

14. Il suffit de réorganiser les matrices (n, n) en hautes colonnes de hauteur n^2 pour que le *physio* reconnaisse un célèbre produit scalaire *canonique* — la somme des produits des entrées respectives — et nous n'avons rien à ajouter.

↱ Malgré sa *canonique* simplicité, ce produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ a son lot de popularité. Il s'appelle produit scalaire de Schur-Hilbert-Schmidt et, dans les annales, on l'a souvent rencontré sous la forme :

$$(\, M \mid N \,) = \mathrm{tr}\big(M \cdot N^{\mathsf{T}}\big)$$

15. Soit i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$. D'après la formule du produit matriciel d'Arthur Cayley nous avons :

$$\big(M \cdot N^{\mathsf{T}}\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (M)_{ik} \big(N^{\mathsf{T}}\big)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} N_{jk}$$

la dernière égalité procédant d'une simple gestion de transposition. Nous en déduisons immédiatement que :

$$(\, M \cdot N^{\mathsf{T}} \mid I_n \,) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} M_{ik} N_{jk} \right) \delta_{ij}$$

puisque nul ne peut ignorer les liens très étroits qui existent entre la matrice unité et le symbole *delta* de Leopold Kronecker. Il est toujours très agréable de s'occuper de ces fameux *deltas* et il ne devrait subsister que :

$$(\, M \cdot N^{\mathsf{T}} \mid I_n \,) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{ik} N_{ik}$$

ce qui, à un maigre *ghost* près, est exactement ce qui nous est demandé.

16. Soit à nouveau i et j deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Le produit matriciel :

$$C_i^{\mathsf{T}} \cdot C_j$$

n'est autre que le produit scalaire *canonique* des deux colonnes C_i et C_j et permettez-nous de rappeler l'important lemme suivant :

CARACTÉRISATION DE L'ORTHOGONALITÉ VIA LES COLONNES :

Soit U une matrice carrée réelle d'ordre n. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. La matrice U est orthogonale, autrement dit :

$$U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

ii. Les colonnes de U forment une famille orthonormale de l'espace $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ équipé de sa structure euclidienne canonique.

Grâce à cette aide providentielle et parce que P est justement orthogonale, nous clamons haut et fort que :

$$C_i{}^{\mathsf{T}} \cdot C_j = \delta_{ij}$$

puisque nul n'est censé ignorer les liens étroits qui unissent l'orthonormalité et le symbole de Leopold.

17. Pour chaque entier $i \in [\![1, n]\!]$, nous noterons :

$$c_{i1} \quad ; \quad c_{i2} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad c_{in}$$

les entrées de la colonne C_i. Les *aficionados* des colimatrices savent alors sur le bout des doigts que les éléments diagonaux de :

$$C_i \cdot C_j{}^{\mathsf{T}}$$

sont les produits :

$$c_{ik}c_{jk} \quad \text{où} \quad k \in [\![1, n]\!]$$

et quand on maîtrise *farpaitement* le produit scalaire $(\ \mid\ )$, il ne doit faire aucun doute que :

$$(\, C_i \cdot C_j{}^{\mathsf{T}} \mid I_n\,) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk} = C_i{}^{\mathsf{T}} \cdot C_j$$

la dernière égalité procédant d'une canonique reconnaissance. La question 16 clôt l'affaire en assénant que :

$$(\, C_i \cdot C_j{}^{\mathsf{T}} \mid I_n\,) = \delta_{ij}$$

18. Soit i, j, k, ℓ quatre éléments de $[\![1, n]\!]$. Comme les deux colimatrices :

$$M = C_i \cdot C_j{}^{\mathsf{T}} \quad \text{et} \quad N = C_k \cdot C_\ell{}^{\mathsf{T}}$$

sont *carrées* (n, n), nous pouvons user de la quinzième et *boum, badaboum !*

$$(\, C_i \cdot C_j{}^{\mathsf{T}} \mid C_k \cdot C_\ell{}^{\mathsf{T}}\,) = (\, M \mid N\,) = (\, M \cdot N^{\mathsf{T}} \mid I_n\,) = (\, C_i \cdot C_j{}^{\mathsf{T}} \cdot C_\ell \cdot C_k{}^{\mathsf{T}} \mid I_n\,)$$

puisque, selon l'ineffable *dressing undressing principle*, nous avons :

$$N^{\mathsf{T}} = C_\ell \cdot {C_k}^{\mathsf{T}}$$

Il reste à bien capter que dans le quadruple produit :

$$C_i \cdot \underbrace{{C_j}^{\mathsf{T}} \cdot C_\ell} \cdot {C_k}^{\mathsf{T}}$$

la partie centrale que nous avons mise en évidence n'est autre que le scalaire δ_{jk} de la question 16, scalaire qui peut évidemment quitter sa position carcérale de telle manière que :

$$C_i \cdot \underbrace{{C_j}^{\mathsf{T}} \cdot C_\ell} \cdot {C_k}^{\mathsf{T}} = \delta_{jl}\, C_i \cdot C_k^{\mathsf{T}}$$

Il résulte alors du *boum badaboum supra* que :

$$(\, C_i \cdot {C_j}^{\mathsf{T}} \mid C_k \cdot {C_\ell}^{\mathsf{T}}\,) = (\, \delta_{jl}\, C_i \cdot {C_k}^{\mathsf{T}} \mid I_n\,)$$

La bilinéarité du produit scalaire et la question 17 terminent alors l'affaire en stipulant que :

$$(\, C_i \cdot {C_j}^{\mathsf{T}} \mid C_k \cdot {C_\ell}^{\mathsf{T}}\,) = \delta_{jl}\, \delta_{ik}$$

19. Nous allons prendre les choses les unes après les autres.

– La première concerne les secrets de fabrication du passage diagonalisant P. Nous ne pouvons pas ignorer que la famille de ses colonnes, en l'occurrence :

$$(C_1, \ldots, C_n)$$

est une base de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A et il résulte déjà des acquis de la partie **3** que la famille :

$$\left(C_i \cdot {C_j}^{\mathsf{T}}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

est une base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de Φ_A.

– La seconde doit regarder du côté de l'orthonormalité qui, comme nous l'avons déjà laissé entendre *supra*, se gère agréablement *via* le symbole de Kronecker. D'ailleurs, à propos de ce délicieux outil, nous devons apporter quelques éclaircissements. Il s'adresse en réalité à deux objets mathématiques *quelconques* que nous noterons *truc* et *machin* et il est légendairement défini par :

$$\delta_{\textit{truc, machin}} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \textit{truc} = \textit{machin} \\ 0 & \text{si} \quad \textit{truc} \neq \textit{machin} \end{cases}$$

Il est vrai qu'il est très souvent utilisé lorsque les deux acolytes *truc* et *machin* sont des *integers* — nous en avons eu l'illustration *supra* — parce qu'il y a, dans notre entourage, de nombreuses familles indexées par des *entiers*. Le problème, ici, est que ce n'est pas du tout le cas de la famille qui nous occupe, en l'occurrence :

$$\left(C_i \cdot {C_j}^{\mathsf{T}}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

qui est, quant à elle, indexée par des *couples* d'entiers et du coup les non anonymes *truc* et *machin* vont devoir appartenir à $[\![1,n]\!]^2$.

À la fin de la précédente, il semble que nous ayons appris que lorsque (i,j) et (k,ℓ) sont des couples d'éléments de $[\![1,n]\!]$ on a :

$$(\,C_i \cdot C_j{}^{\mathsf{T}} \mid C_k \cdot C_\ell{}^{\mathsf{T}}\,) = \delta_{ik}\,\delta_{jl}$$

Oui mais voilà, en y regardant bien, il ne doit pas être insurmontable de justifier la miraculeuse égalité :

$$\delta_{ik}\,\delta_{jl} = \delta_{(i,j),(k,\ell)}$$

puisque, égalité dans le couple oblige, nous avons l'équivalence logique :

$$(i,j) = (k,\ell) \quad\Longleftrightarrow\quad i = k \;\text{ et }\; j = \ell$$

Voilà donc *in fine* que :

$$(\,C_i \cdot C_j{}^{\mathsf{T}} \mid C_k \cdot C_\ell{}^{\mathsf{T}}\,) = \delta_{(i,j),(k,\ell)}$$

So...

↱ Nous venons, magistralement, d'exhiber une base *orthonormale* de l'espace euclidien de Shur-Hilbert-Schmidt :

$$\Big(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), (\ \mid\ )\Big)$$

dans laquelle la matrice de Φ_A est diagonale et donc, *a fortiori*, symétrique réelle. La caractérisation matricielle de la symétrie révèle alors que Φ_A est un endomorphisme *symétrique* de notre espace euclidien, ce que notre perspicace lecteur pourra retrouver directement en établissant, *a la mano*, que :

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \forall N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \qquad (\,\Phi_A(M) \mid N\,) = (\,M \mid \Phi_A(N)\,)$$

Enjoy it !