CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer *à Essec Business School.*

Problème 1

Partie 1

1. Soit $x > 0$. Cette *stricte* positivité fait que la fonction :

$$t \longmapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et son intégrale n'est donc impropre qu'en plus l'infini. Il suffit alors d'observer que :

$$\forall t \geqslant 1 \qquad 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{x+t} \leqslant e^{-t}$$

de ne pas avoir égaré l'existence de la référence exponentielle :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

et d'évoquer le principe de comparaison en signe positif.

2. Soit à nouveau $x > 0$. Comme notre intégrande est positive, nous avons tout d'abord :

$$f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

et il semble difficilement contestable que :

$$\forall t \in [0, 1] \qquad \frac{e^{-t}}{x+t} \geqslant \frac{e^{-1}}{x+t}$$

La transitive conclusion n'est alors affaire que de croissance de l'intégration et de bornes bien disposées. À en croire Isaac Barrow, nous venons d'établir que :

$$f(x) \geqslant e^{-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

puisque, vu la positivité ambiante(*) :

$$\int_0^1 \frac{dt}{x+t} = \Big[\ln(x+t)\Big]_0^1 = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

et comme à l'évidence :

$$e^{-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x>0]{x \to 0} +\infty$$

l'histoire se termine sur un *squeeze* à l'infini.

3. Soit derechef $x > 0$ et organisons nous en deux temps.

– Nous commençons par les observations suivantes :

(*) En d'autres lieux notre primitive eut probablement dû être $t \mapsto \ln|x+t|$...

- les bornes de l'intégrale définissant $f(x)$ sont dans le sens croissant strict ;
- son intégrande est continue et positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+$;
- son intégrande n'est visiblement pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$ pour la simple et bonne raison qu'elle ne s'y annule jamais ;

Le théorème de stricte positivité de l'intégrale est alors catégorique. Nous avons déjà l'inégalité stricte :

$$f(x) > 0$$

– Nous poursuivons en mettant en avant la nouvelle — mais flagrante — inégalité :

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \frac{e^{-t}}{x+t} \leqslant \frac{e^{-t}}{x}$$

Vu que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

la conclusion repose à nouveau sur la croissance de l'intégration et sur l'idéale disposition des bornes. Maintenant, et puisque :

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

le *squeezing process* prend le relais en assénant effectivement que :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

4. Impossible, tout d'abord, de ne pas avoir reconnu $\Gamma(2)$ qui existe officiellement et qui vaut d'ailleurs 1. Soit maintenant et encore une fois $x > 0$. Comme nous n'aimons pas trop « valuer le positif », et vu ce qui s'est passé plus haut, nous écrivons plutôt :

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

que la linéarité de l'intégration et quelques aménagements transforment immédiatement en :

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt$$

Il ne reste alors qu'à avoir bien enregistré que :

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \frac{te^{-t}}{x(x+t)} \leqslant \frac{te^{-t}}{x^2}$$

et de se jouer, *one more time*, de croissance et de bornes « bien orientées ». D'ailleurs, vu ce que nous avons rappelé *supra* à propos de $\Gamma(2)$, nous avons en réalité :

$$0 \leqslant \frac{1}{x} - f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

et il résulte mentalement de l'encadrement précédent qu'au voisinage de plus l'infini :

$$f(x) - \frac{1}{x} = o\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

ce qui est précisément la *définition* de l'équivalence :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Partie 2

5.a. Comme x est à nouveau *strictement* positif, il s'agit encore une intégrale impropre une fois en plus l'infini et comme :

$$\forall t \geqslant 1 \qquad 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leqslant e^{-t}$$

l'histoire se termine comme à la première question.

b. Soit $t \geqslant 0$. Nous avons déjà évoqué la non nullité de $x+t$ et il se trouve que le réel $x+h+t$ ne l'est pas plus car, *thank's to the cumfort hypothesis :*

$$h > -\frac{x}{2}$$

il est carrément strictement positif. Tout est donc sous contrôle et c'est déjà la moindre des choses. Cela étant, après réduction au même dénominateur, notre ami potache nous apprend que :

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2} = \frac{h}{(x+t)^2(x+h+t)}$$

égalité que la valuation transforme en :

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| = \frac{|h|}{(x+t)^2(x+h+t)}$$

puisque, comme à l'accoutumée, on ne value pas ce qui est ouvertement positif. Le deuxième effet *kiss cool* de l'hypothèse de confort permet maintenant d'observer que :

$$(x+t)^2(x+h+t) \geqslant \frac{x^3}{2} > 0$$

puisque :

$$x+t \geqslant x > 0 \quad \text{et} \quad x+h+t \geqslant \frac{x}{2} + t \geqslant \frac{x}{2} > 0$$

Il en ressort alors très positivement que :

$$\frac{|h|}{(x+t)^2(x+h+t)} \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$$

et tout le monde est ravi.

c. Pour être assurés de ne pas faire n'importe quoi, nous commençons par faire valoir que :

– le réel $f(x)$ existe depuis la toute première question ;

– ensuite, et c'est le troisième effet *kiss cool*, il en est de même du réel $f(x+h)$ puisque $x+h$ est strictement positif comme son copain x ;

– Il est fort heureusement indiqué que h n'est pas nul ;

– enfin, et c'est le récent a qui le précise, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$$

a décidé de vivre sa vie.

Ces remarques donnent alors tout son sens à notre affaire et la linéarité de l'intégration nous amène déjà à :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-t} dt$$

où, histoire d'alléger un peu l'atmosphère, nous avons noté u la fonction :

$$u : t \longmapsto \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}$$

Remarquons alors que la fonction :

$$t \longmapsto u(t)e^{-t}$$

est, sur l'intervalle $[0,+\infty[$, combinaison linéaire de trois fonctions ayant ouvertement une intégrale *absolument* convergente et il est alors bon de savoir(*) que son intégrale est également *absolument* convergente. Il est alors tout à fait licite de la *trianguler* et voilà donc que :

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |u(t)|e^{-t} dt$$

puisque les bornes…

Soit alors $t \geqslant 0$. Il semble que la question précédente nous ait soufflé à l'oreille que :

$$|u(t)|e^{-t} \leqslant \frac{2|h|}{x^3} e^{-t}$$

(*) On rappelle que toute combinaison linéaire de fonctions absolument intégrables sur un intervaalle est elle-même absolument intégrable sur cet intervalle.

la positivité de l'exponentielle n'étant bien entendu pas étrangère à l'histoire. Il a déjà été dit que la référence exponentielle :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

existe et nul ne peut ignorer qu'elle vaut un. La croissance et un *picochouia* de linéarité de l'intégration permettent alors d'en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} |u(t)| e^{-t} dt \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$$

puisque, comme dirait notre ami Pierre Albaladéjo, les bornes n'ont pas changé d'âne ! C'est ainsi dans une ambiance de pure transitivité que *finalmente :*

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$$

6. Nous nous replaçons dans le contexte de la précédente question et nous faisons valoir que sans aucun état d'âme, nous avons :

$$\frac{2|h|}{x^3} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Il en résulte par *squeeze* que :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

ce qui, parce que l'intégrale du *right hand side* ne contient visiblement pas la lettre h, peut avantageusement s'écrire :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$$

Cela montre par *définition* que f est dérivable au point x et que :

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$$

et comme cette histoire vaut pour *tous* les réels $x > 0$...

7. Pourquoi diable ce réel ϵ ? Déjà que cette officielle façon de pratiquer les intégrations par parties « impropres » est plus que *bourrine*, ce n'est vraiment pas la peine d'en rajouter !

On annonce donc x et A strictement positifs et on considère les deux fonctions :

$$u : t \longmapsto e^{-t} \quad \text{et} \quad v : t \longmapsto -\frac{1}{x+t}$$

Comme nous n'avons pas oublié que $x > 0$, elles sont éminemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, A]$ et nous avons :

$$\forall t \in [0, A] \qquad u'(t) = -e^{-t} \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{1}{(x+t)^2}$$

Il en résulte alors *by parts* que :

$$\int_0^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = \frac{1}{x} - \frac{e^{-A}}{x+A} - \int_0^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

8. Soit à nouveau x et A deux réels strictement positif. Le passage à la limite lorsque A tend vers plus l'infini dans l'égalité précédente est assurément autorisé depuis longtemps et il donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

Autant dire alors que :

$$f'(x) = f(x) - \frac{1}{x}$$

ce qui n'est pas pour nous déplaire.

9. Notons tout d'abord que f étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y est *a fortiori* continue. La précédente relation et les théorèmes généraux font alors que f' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et f y est donc déjà de classe $\mathcal{C}^1$. On en remet alors une couche puisque la précédente signale maintenant que f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et f y hérite effectivement de la classe $\mathcal{C}^2$. Une simple dérivation termine alors l'affaire.

B.

10. Les théorèmes généraux donnent bien sûr g dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a sans surprise :

$$\forall x > 0 \qquad g'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

la dernière égalité procédant tout bêtement de la question 8.

11. Soit $x > 0$. Cette stricte positivité assure que la fonction :

$$u \longmapsto \frac{e^{-u}}{u}$$

est continue sur la demi-droite fermée $[x, +\infty[$ à telle enseigne que son intégrale n'est impropre qu'une fois. Si l'on en croit la question 10, une primitive sur $[x, +\infty[$ de sa fonction intérieure est clairement :

$$u \longmapsto -e^{-u} f(u)$$

et vu ce qu'a révélé la question 3, cette primitive a, en plus l'infini, la limite finie 0. Le test de la primitive est alors formel, notre intégrale existe et la formule de Barrow termine l'affaire puisque :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \Big[-e^{-u} f(u)\Big]_x^{+\infty} = e^{-x} f(x)$$

ce qui devrait satisfaire tout le monde.

↱ Tout cela est un peu scandaleux ! Nous avons sué sang et eau — méthode de dérivation de Leibniz, intégration par parties et autres tribulations tortueuses — pour parvenir péniblement à :

$$f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

alors que cette égalité s'obtient *mentalement* en partant de la définition :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

et en lui prodiguant le changement de variable affine :

$$t = u - x$$

dont la légalisation est aussi évidente que celle de la quadrature du carré ! Pourquoi faire simple…

12. Nous venons de démontrer que :

$$\forall x > 0 \qquad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = e^{-x} f(x)$$

et nous n'avons pas perdu de vue que, question 4 *dixit*, nous avons :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

So…

13. D'après la précédente, nous avons l'équivalence :

$$n^4 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{n \to +\infty}{\sim} n^3 e^{-n}$$

et il résulte alors des prépondérances classiques que :

$$n^4 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Bref :

$$n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1 \quad \frac{1}{n^2} \geqslant 0$$

Vu que la série de Riemman de paramètre deux converge, le principe de prépondérance en signe positif règle cette affaire et la série concernée est définitivement convergente.

Partie 3

14. Notons que nous sommes bien battus pour établir que la fonction f est à valeurs *strictement* positives et il en résulte en particulier que :

$$f(1) > 0$$

Nous pouvons alors nous organiser.

– Vu notre pertinente et liminaire remarque, la fonction h est clairement et *farpaitement* définie sur $\mathbb{R}$.

– Cette même remarque fait que h est assurément à valeurs positives ou nulles.

– La fonction h n'a assurément qu'un seul point de discontinuité, en l'occurrence zéro.

– Il ne reste enfin qu'à observer que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}dt$$

existe depuis une fort belle lurette et qu'elle est supposée valoir $f(1)$.

15. L'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+t}dt$$

n'est visiblement impropre qu'en plus l'infini et nous avons l'honneur d'asséner que :

$$\frac{te^{-t}}{1+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t} \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 0 \quad e^{-t} \geqslant 0$$

Il reste alors à ressortir la sempiternelle référence exponentielle et le principe des équivalents en signe positif. La variable X admet bel et bien une espérance.

↱ Pour couper court à toute polluante polémique, nous rappelons que les intégrales permettant de définir *tous* les moments — normaux ou même centrés — sont automatiquement *absolument* convergentes dès l'instant qu'elles veulent bien exister…

Poursuivons. Nous avons tout d'abord :

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{f(1)} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+t}dt$$

et il est alors de bon ton d'avoir bien capté que :

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \frac{te^{-t}}{1+t} = e^{-t} - \frac{e^{-t}}{1+t}$$

à telle enseigne que, grâce à la sempiternelle et au réveil du *physio*, nous avons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+t}dt = 1 - f(1)$$

Voilà donc *in fine* que :

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{f(1)} - 1$$

Problème 2

À la lecture du texte, nous comprenons que le concepteur souhaite — à juste titre — attirer notre attention sur le rôle joué par les matrices $(1, 1)$ dans les calculs et nous amène à réfléchir sur la pratique absolument courante qui consiste à les *identifier* à l'unique scalaire se trouvant à l'intérieur, ce qui, *grosso modo*, consiste à oser écrire :

$$\forall a \in \mathbb{K} \qquad a = [\,a\,]$$

Nous allons alors constater que cette identification peut parfois avoir ses limites et que comme toujours, il est important de ne pas faire n'importe quoi. Un des premiers secrets concernant ces drôles de matrices est livré par l'amusant et très facile lemme suivant :

LEMME MATRICES DES D'ORDRE UN ET DU PRODUIT :

Soit a un scalaire quelconque.

i. Soit C une matrice colonne *quelconque également. On a l'égalité :*

$$a \cdot C = C \times [\,a\,]$$

mais attention cela est totalement faux, voire carrément insensé, lorsque C n'est pas une matrice colonne.

ii. Soit L une matrice ligne *également quelconque. On a aussi l'égalité :*

$$a \cdot L = [\,a\,] \times L$$

mais attention cela est totalement faux, voire carrément insensé, lorsque L n'est pas une matrice ligne.

Toute la finesse et le côté amusant de la situation consiste en la présence à gauche du produit externe « $\cdot$ » et à droite, de l'authentique produit matriciel « $\times$ » d'Arthur Cayley.

C'est ici que nous pouvons illustrer les limites à cette fameuse identification. Si a est un scalaire et si R est une matrice rectangulaire quelconque le produit externe :

$$a \cdot R$$

est totalement sensé alors que le produit matriciel :

$$[\,a\,] \times R$$

ne l'est généralement jamais ! À bon entendeur donc…

Partie 1

1. Au vu et au su des formats des unes et des autres, la matrice A_0 est parfaitement définie et est carrée d'ordre 4. Organisons-nous alors en deux temps :

– Soit X appartenant au noyau de A_0. Nous avons :

$$U_0 \cdot {V_0}^{\mathsf{T}} \cdot X = 0$$

et il faut impérativement capter que, U_0 est justement une matrice colonne et que ${V_0}^{\mathsf{T}} \cdot X$ est justement une matrice $(1,1)$ dont l'élément intérieur est d'ailleurs :

$$< V_0 \, , X >$$

Bien sûr, parce qu'il n'y a aucune raison que sans priver, nous notons ici $< , >$ le produit scalaire canonique sur $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Notre amusant résultat permet alors d'en déduire que :

$$< V_0 \, , X > \cdot U_0 = 0$$

et comme U_0 n'est pas nulle il s'ensuit que :

$$X \in \{V_0\}^{\perp}$$

– La réciproque étant quant à elle totalement triviale, nous déduisons *in fine* que :

$$\mathsf{Ker}\, A_0 = \mathsf{E}_0(A_0) = \{V_0\}^{\perp}$$

Comme le vecteur V_0 est également non nul, la fomule « dimension d'un orthogonal » indique alors mentalement que :

$$\mathsf{dim}\, \mathsf{E}_0(A_0) = 4 - \mathsf{dim}\, \mathsf{Vect}\, V_0 = 3$$

ce qui démontre déjà que 0 est bel et bien valeur propre de A_0 et que l'espace propre attaché est de dimension 3. Il reste alors à trouver une base du canonique orthogonal du sous-espace V_0. Il est manifestement formé des colonnes :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

telles que :

$$x - y + 2z - t = 0$$

c'est-à-dire des colonnes :

$$y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et la famille :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

dont la liberté — profondeurs différentes — se voit comme le nez au milieu de la figure, devrait définitivement faire l'affaire.

2.a. On trouve aisément :

$$A_0 \cdot U_0 = U_0$$

et comme U_0 n'est pas nul, le réel 1 est aussi valeur propre de A_0 et :

$$U_0 \in \mathsf{E}_1(A_0)$$

b. Nous avons une valeur propre, en l'occurrence 0, qui produit un espace propre de dimension 3 et nous venons de tomber sur une autre valeur propre en la personne du réel un. Nous rappelons alors deux choses capitales :

- un espace propre n'est jamais nul, à telle enseigne que :

$$\dim \mathsf{E}_1(A_0) \geqslant 1$$

- la règle du non-dépassement qui, dans le cas présent, entraîne :

$$\dim \mathsf{E}_0(A_0) + \dim \mathsf{E}_1(A_0) \leqslant 4$$

En bref, il n'y a plus vraiment de place au doute. Nous avons nécessairement :

$$\dim \mathsf{E}_1(A_0) = 1 \quad ; \quad \mathsf{E}_1(A_0) = \mathrm{Vect}\, U_0 \quad ; \quad \dim \mathsf{E}_0(A_0) + \dim \mathsf{E}_1(A_0) = 4$$

Il ne peut plus y avoir de nouvelle valeur propre — sans quoi *non over rule upset !* et donc :

$$\mathrm{Spec}\, A_0 = \{0, 1\}$$

La condition nécessaire et suffisante dite « des dimensions des espaces propres » — la fameuse *cns* du comptable — assure que A_0 est effectivement diagonalisable.

c. Comme nous connaissons parfaitement nos classiques, nous proposons :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

et nous pouvons changer de partie.

Partie 2

3. Il est assez clair que « tr » applique bien $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et sa linéarité repose essentiellement sur celle de la sommation. C'est le résultat archi classique selon lequel la trace est une *forme linéaire sur* $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n. Grâce à la formule du produit matriciel, nous avons :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji}$$

et de la même façon :

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{ji}A_{ij}$$

Les scalaires commutent et il existe sur le marché une formule dite d'inversion des sommations. *So*…

5. Soit à nouveau A une matrice réelle carrée d'ordre n. La même argumentation conduit cette fois à :

$$\mathrm{tr}\left(A^{\mathsf{T}} \cdot A\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(A^{\mathsf{T}} \cdot A\right)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A^{\mathsf{T}}_{ij}A_{ji}$$

et une simple gestion de transposititon assure effectivement que :

$$\mathrm{tr}\left(A^{\mathsf{T}} \cdot A\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ji}^{2}$$

↱ Signalons, juste pour la culture, que ce dernier scalaire n'est autre que le carré de la norme de Schur de la matrice A.

Partie 3

6.a. Nous avons les formats :

$$\begin{array}{ccccc} & U & & V^{\mathsf{T}} & \\ \textit{entrée} & (n,1) & \textit{fit} & (1,n) & \textit{sortie} \end{array}$$

Le « *fit* » autorise le produit matriciel en question et vu le couple $(\textit{entrée}, \textit{sortie})$, le résultat est assurément une matrice (n,n). Soit alors (i,j) un couple d'entiers de $[\![1,n]\!]$. Il ne fait aucun doute que :

$$\left(U \cdot V^{\mathsf{T}}\right)_{ij} = u_i v_j$$

b. Il suffit de demander.

$$\mathrm{tr}\left(U \cdot V^{\mathsf{T}}\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

c. Les colonnes de la matrice $U \cdot V^{\mathsf{T}}$ sont :

$$v_1 U \quad ; \quad v_2 U \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad v_n U$$

et comme l'image d'une matrice est l'espace vectoriel engendré par ses *own columns* on déduit déjà que :

$$\mathrm{Im}\left(U \cdot V^{\mathsf{T}}\right) \subset \mathrm{Vect}\, U$$

mais ce n'est pas fini, comme la colonne V n'est pas nulle, l'un des v_i au moins n'est pas nul.

7.a. La matrice A n'est pas nulle — elle est de rang 1 — et elle possède donc au moins une colonne non-nulle. Nous proposons alors pour j_0, n'importe quel entier de $[\![1,n]\!]$ tel que :

$$C_{j_0}(A) \neq 0$$

Comme $\dim \operatorname{Im} A = 1$ et que $C_{j_0}(A)$ appartient à notre image, nous avons évidemment :

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect} C_{j_0}(A)$$

Soit alors $j \in [\![1,n]\!]$. Comme la colonne $C_j(A)$ appartient également à notre image, il existe effectivement un scalaire α_j tel que :

$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$$

↱ Au risque de radoter, nous insistons sur le point suivant : les colonnes d'une matrice quelconque appartiennent à son image et elles en forment même une famille génératrice.

↱ Voici une autre chose qui va s'avérer cruciale plus bas. Nous espérons ne froisser personne en affirmant que :

$$\alpha_{j_0} = 1$$

b. Soit i et j appartenant à $[\![1,n]\!]$. D'après ce qui vient de se passer, nous pouvons revendiquer l'égalité :

$$A_{ij} = A_{ij_0}\alpha_j$$

et la récente question 6.a ne laisse plus de place au doute. Nous avons l'égalité :

$$A = U \cdot V^{\mathsf{T}}$$

si nous proposons :

$$U = C_{j_0}(A) = \left(A_{ij_0}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \quad \text{et} \quad V = (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$$

Ces propositions sont en effet parfaitement idoines vu que la colonne U est *non nulle* depuis fort longtemps et que sa copine V l'est également depuis que nous avons mis le doigt sur :

$$\alpha_{j_0} = 1$$

↱ Pour bien comprendre nos deux propositions, nous rappelons que le texte a choisi de noter en listes les matrices colonnes ce qui en réalité n'est ici qu'une façon de gagner de la place…

8. Il suffit de faire la synthèse de ce qui a été raconté lors des récentes questions 6 et 7. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ n'est de rang 1 que si, et seulement s'il existe deux colonnes *non nulles* U et V réelles de hauteur n telles que :

$$A = U \cdot V^{\mathsf{T}} \qquad (*)$$

↱ Le texte n'aborde pas le problème de l'*unicité* d'un tel couple (U, V). Signalons pour la culture qu'il ne l'est pas du tout. Il ne l'est seulement — ce qui n'est pas anodin ! — qu'à une homothétie près, ce qui signifie que si (U_0, V_0) est *un* couple convenable, les couples convenables sont *exactement* les :

$$(\alpha U_0, \alpha^{-1} V_0) \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

Le lecteur un tant soit peu curieux pourra essayer de démontrer cela.

↱ Il est très facile de constater que $\mathbb{R}$ ne joue aucun rôle majeur dans les conclusions des deux précédentes parties. Tout ce qui y a été dit vaut, mot pour mot, pour des matrices à coefficients complexes qui pourraient même se payer le luxe d'être rectangulaires !

Partie 4

9. Soit i et j deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Le facile calcul de l'élément en place (i, j) du produit matriciel en question a déjà été effectué maintes fois et nous ne craignons donc pas d'affirmer ici que :

$$\left(U_X \cdot U_Y{}^{\mathsf{T}}\right)_{ij} = \mathrm{p}(X = i) \cdot \mathrm{p}(Y = j)$$

Comme il est dit que X et Y sont indépendantes, cela se métamorphose en :

$$\left(U_X \cdot U_Y{}^{\mathsf{T}}\right)_{ij} = \mathrm{p}\big([X = i] \cap [Y = j]\big)$$

et autant dire alors que :

$$\left(U_X \cdot U_Y{}^{\mathsf{T}}\right)_{ij} = M_{ij}$$

En bref :

$$U_X \cdot U_Y{}^{\mathsf{T}} = M$$

et c'est déjà un bon début. Il nous reste maintenant à préciser que les deux colonnes U_X et U_Y sont non nulles puisque, loi de probabilité oblige, la somme de leurs entrées respectives est égale à 1. La caractérisation de la question 8 est alors catégorique. Nous avons certainement :

$$\operatorname{rg} M = 1$$

10.*a*. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Par définition de la matrice M, l'élément à la $i^{\text{ème}}$ place — à la $i^{\text{ème}}$ ligne si l'on préfère — de la colonne :

$$C_1(M) + \cdots + C_n(M)$$

n'est autre que la somme :

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{p}\big([X = i] \cap [Y = j]\big)$$

Les habitués des problèmes de couples — particulièrement les liens entre conjointe et marges — savent alors bien que :

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{p}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \mathrm{p}(X = i) = \left(U_X\right)_i$$

et nous avons effectivement établi que :

$$C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X$$

b. Au risque de radoter, nous rappelons que l'image d'une matrice est l'espace vectoriel engendré *by its own columns* et l'égalité précédente révèle en particulier que :

$$U_X \in \operatorname{Im} M$$

Oui mais voilà, $\operatorname{Im} M$ est de dimension 1 — une droite vectorielle donc — et nous avons déjà signalé que U_X n'est pas nulle. Il n'en faut alors pas plus pour déjà réclamer :

$$\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect} U_X$$

Soit alors $j \in [\![1, n]\!]$. Comme $C_j(M)$ appartient à $\operatorname{Im} M$, il existe fatalement un réel β_j tel que :

$$C_j(M) = \beta_j U_X$$

c. Soit à nouveau $j \in [\![1, n]\!]$. Nous partons de la récente égalité :

$$C_j(M) = \beta_j U_X$$

et nous décidons d'ajouter membre à membre les entrées de ces deux colonnes.

– La somme des entrées de $C_j(M)$ est, toujours par définition de M, le réel :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}\big([X = i] \cap [Y = j]\big)$$

que les « conseillers conjugaux » *supra* transforment en :

$$\mathrm{p}(Y = j)$$

– La somme des entrées de la colonne $\beta_j U_X$ vaut quant à elle β_j puisque celle des entrées de U_X vaut 1 depuis longtemps.

Il ne fait plus alors l'ombre d'un doute que :

$$\beta_j = \mathrm{p}(Y = j)$$

d. Soit i et j deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Nous savons désormais que :

$$C_j(M) = \mathrm{p}(Y = j) U_X$$

nous identifions les termes de la $i^{\text{ème}}$ ligne et voilà, comme par miracle, que :

$$\mathrm{p}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \mathrm{p}(Y = j) \cdot \mathrm{p}(X = i)$$

chronique d'une indépendance annoncée…

Partie 5

11. Il est dit que $\operatorname{rg} A = 1$ et que $n \geqslant 2$. Le test du rang est alors formel, la matrice A n'est pas inversible et 0 est donc bel et bien une de ses valeurs propres. Cela étant et si l'on en croit le théorème du rang, nous devrions avoir :

$$\dim \mathsf{E}_0(A) = n - 1$$

d'où un espace propre très *hyperlanant*...

12. Lors de la question 6.b, nous avons croisé l'égalité :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = <U\,,V>$$

et produit scalaire canonique oblige, le produit :

$$V^{\mathsf{T}} \cdot U$$

est la matrice $(1,1)$ dont l'unique entrée est $<U\,,V>$ Il apparaît donc effectivement que :

$$V^{\mathsf{T}} \cdot U = [\,a\,]$$

↱ Le texte semble ici insister et à juste titre d'ailleurs sur la problématique que nous avons évoqué en tout début de texte à propos des manipulations des matrices $(1,1)$.

Nous pouvons poursuivre. Nous avons bien sûr :

$$A^2 = U \times V^{\mathsf{T}} \times U \times V^{\mathsf{T}}$$

que le début de la question transforme en :

$$A^2 = U \times [\,a\,] \times V^{\mathsf{T}}$$

Le fameux lemme de notre début de texte prend alors le relais en nous autorisant l'écriture :

$$A^2 = a \cdot U \times V^{\mathsf{T}}$$

et l'histoire se termine alors bien sur :

$$A^2 = a \cdot A$$

13. Le polynôme X^2 est annulateur de A et sa seule racine est zéro. L'important thème « annulateur et spectre » révèle ainsi que :

$$\operatorname{Spec} A \subset \{0\}$$

et compte tenu de la question 11 l'on a carrément :

$$\operatorname{Spec} A = \{0\}$$

Supposons alors par l'absurde que A soit diagonalisable. Comme elle est *monovaleur-propre* zéro, un simple mais important argument obligerait :

$$A = 0$$

ce qui n'est pas vraiment très raisonnable puisque $\operatorname{rg} A = 1$.

14. C'est reparti pour un tour ! Nous avons tour à tour :

$$A \times U = U \times V^{\mathsf{T}} \times U = U \times [\,a\,] = a \cdot U$$

et comme U est précisée non nulle, nous découvrons une nouvelle valeur propre, en la personne du réel a. Nous disposons donc de deux valeurs propres de A, en l'occurrence 0, qui est accompagnée d'un espace propre de dimension $n-1$, et la nouvelle venue a et nous rappelons à nouveau deux choses capitales :

– un espace propre n'est jamais nul, ce qui impose ici :

$$\dim \mathsf{E}_a(A) \geqslant 1$$

– la règle du non dépassement(*) selon laquelle nous devons avoir :

$$\dim \mathsf{E}_0(A) + \dim \mathsf{E}_a(A) \leqslant n \quad \textit{i.e.} \quad \dim \mathsf{E}_a(A) \leqslant 1$$

Bref, nous avons inéluctablement :

$$\dim \mathsf{E}_a(A) = 1$$

Du coup, le plein est définitivement fait puisque :

$$\dim \mathsf{E}_0(A) + \dim \mathsf{E}_a(A) = n$$

l'intrusion d'une éventuelle troisième valeur propre venue de nulle part devant très fortement fâcher la fameuse « *non over rule* » ! Ainsi :

$$\operatorname{Spec} A = \{0, a\}$$

et la condition nécessaire et suffisante des dimensions des espaces propres — la *cns* du comptable — termine l'affaire.

↱ Nous avons scrupuleusement suivi les injonctions du texte mais nous aurions préféré suivre la piste suivante. Comme :

$$A^2 = aA \quad \text{et} \quad a \neq 0$$

l'on déduit mentalement que :

$$\left(\frac{A}{a}\right)^2 = \frac{A}{a}$$

(*) Lorsque $M \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$, toute somme de dimensions d'espaces $\mathsf{E}_\lambda(M)$ attachés à des scalaires λ différents ne peut jamais dépasser l'entier n.

La matrice A/a, désormais matrice de projecteur, est donc tranquilement diagonalisable et sa copine :

$$A = a \cdot \frac{A}{a}$$

se doit de l'être également.

15. Tout a été dit aux récentes questions 13 et 14. *Here you are :*

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. On a l'équivalence logique :

$$A \quad \text{diagonalisable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{tr} A \neq 0$$

↱ Nous faisons remarquer que tout ce qui a été fait dans cette cinquième partie vaut encore une fois, mot pour mot, pour des matrices à coefficients *complexes*.

Partie 6

16. Nous allons nous organiser en quatre points.

– Soit M et N appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Les deux matrices $M^\intercal$ et N sont aussi carrées d'ordre n, leur produit est donc assurément possible et donne encore une matrice *carrée* qui, du coup, possède une authentique trace qui est un authentique réel !

Autant dire que $<\,,\,>$ applique bien $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. En outre, grâce à la même argumentation que celle développée lors de la question 5, nous avons aisément :

$$< M\,,\,N > = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ji}N_{ji} \tag{1}$$

égalité qui, pour la suite, va s'avérer bien plus efficace que la définition « *tracée* ».

– Justement, au vu et au su de la récente expression (1), la symétrie est totalement évidente.

– On fixe $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. La linéarité de l'application :

$$N \longmapsto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ji}N_{ji}$$

repose essentiellement sur celle de la sommation.

– Soit, pour finir, M une matrice *non nulle* de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Nous avons :

$$< M\,,\,M > = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ji}^2$$

et il s'agit à l'évidence d'une somme de réels positifs ou nuls dont au moins l'un d'entre-eux est *strictement* positif. Nul doute alors que :

$$< M\,,\,M > > 0$$

ce qui nous permet d'envisager la suite.

↱ Toute ressemblance avec le fameux produit scalaire de David Hilbert et Ehrard Schmidt est plus qu'une simple coïncidence. La norme euclidienne qui lui est attachée s'appelle, quant à elle, norme de Issai Schur.

17. En ce qui concerne la symétrie on peut la déduire de l'incontournable *dressing undressing principle* selon lequel l'on a tour à tour :

$$S^{\mathsf{T}} = \left(V \cdot V^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = V \cdot V^{\mathsf{T}} = S$$

On peut également la déduire du 6.a qui stipule ici que :

$$S = \Big[\, v_i v_j \,\Big]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

matrice éminemment symétrique. D'autre part, si l'on en croit, la récente question 12, nous devrions avoir :

$$S^2 = (\operatorname{tr} S) \cdot S$$

et comme :

$$\operatorname{tr} S = \sum_{j=1}^{n} v_j^2 = 1$$

nous pouvons changer de question.

18.a. Nous nous organisons *un poquitín*.

– Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Le produit matriciel SM est assurément possible et livre encore une matrice carrée d'ordre n. Autant dire ainsi que Φ applique bien $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.

– La linéarité de Φ n'est qu'une pure formalité, la distributivité à droite du produit matriciel par rapport à la somme, n'étant sûrement pas étrangère à l'affaire.

– Soit pour finir M et N appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Nous avons d'un côté et tour à tour :

$$< \Phi(M)\,,\, N > = < S \cdot M\,,\, N > = \operatorname{tr}\big((S \cdot M)^{\mathsf{T}} \cdot N\big) = \operatorname{tr}\big(M^{\mathsf{T}} \cdot S \cdot N\big)$$

la dernière égalité procédant uniquement de *dressing undressing* et de symétrie de S. D'un autre côté mais toujours tour à tour, nous avons aussi :

$$< M\,,\, \Phi(N) > = < M\,,\, S \cdot N > = \operatorname{tr}\big(M^{\mathsf{T}} \cdot S \cdot N\big)$$

C'est donc sans autre forme de procès que nous avons :

$$< \Phi(M)\,,\, N > = < M\,,\, \Phi(N) >$$

et nous voici donc aux *origines de la symétrie*.

b. Soit à nouveau $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Nous avons sans surprise :

$$\Phi^2(M) = \Phi(SM) = S^2 M = SM$$

la dernière égalité procédant d'une *projection* de la question 17. Autant dire alors que :

$$\Phi^2(M) = \Phi(M)$$

et comme cela vaut pour toutes les M...

L'opérateur Φ est donc désormais un projecteur, et comme pour tous les projecteurs du monde, nous avons :

$$\operatorname{Spec} \Phi \subset \{0, 1\}$$

puisque le polynôme $X(X-1)$...

c. Nous ne dirons que deux choses :

– *Primo*, pour la simple et bonne raison que Φ est un projecteur de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il ne fait aucun doute(*) que :

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \Phi \oplus \operatorname{Im} \Phi$$

et nul ne peut ignorer que :

$$\operatorname{Im} \Phi = \operatorname{Ker}(e - \Phi) = \operatorname{Ker}(\Phi - e)$$

à telle enseigne que *finalmente* :

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} \Phi \oplus \operatorname{Ker}(\Phi - e)$$

– *Deuzio*, comme Φ est un endomorphisme symétrique, un officiel lemme d'orthogonalité assure que ses espaces $\mathrm{E}_\lambda(\Phi)$ sont deux à deux orthogonaux et qu'en particulier :

$$\mathrm{E}_0(\Phi) \perp \mathrm{E}_1(\Phi)$$

ce qui s'écrit également :

$$\operatorname{Ker} \Phi \perp \operatorname{Ker}(\Phi - e)$$

So...

(*) Les projecteurs font partie des fameux endomorphismes « *kis* » à savoir ceux dont le noyau et l'image sont supplémentaires dans l'espace ambiant.