CORRIGÉ

Par Frédéric Brossard, professeur en CPGE à Intégrale, à Paris.

Exercice 1

1. La fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x(y^2+z^2+1) \end{cases}$ est C^2 sur $\mathbb{R}^3$ car polynomiale.

   La fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto e^t \end{cases}$ est C^2

   Donc par composition $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto e^{x(y^2+z^2+1)} \end{cases}$ est C^2 sur $\mathbb{R}^3$

   La projection $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x \end{cases}$ est C^2 sur $\mathbb{R}^3$

   Donc f est bien C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$ en tant que produit de fonctions C^2

2. $M(x,y,z)$ est point critique de f ssi (S) : $\nabla(f)(x,y,z) = (0,0,0)$

   $$(S) : \iff \begin{cases} \partial_1(f)(x,y,z) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y,z) = 0 \\ \partial_3(f)(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{x(y^2+z^2+1)}(1+(y^2+z^2+1)x) = 0 \\ 2x^2ye^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \\ 2x^2ze^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \end{cases}$$

   $$(S) : \iff \begin{cases} 1+(y^2+z^2+1)x = 0 \\ 2x^2y = 0 \\ 2x^2z = 0 \end{cases}$$

   On a forcément $x \neq 0$ sinon la première équation n'a pas de solution puisque qu'elle s'écrirait $1 = 0$

   Donc nécessairement $y = z = 0$ et $x = -1$

   Le seul point critique de f est le point $(-1,0,0)$

3. a) f étant C^2, d'après le théorème de Schwarz, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \partial^2_{12}f(x,y,z) = \partial^2_{21}f(x,y,z)$ et de même $\partial^2_{13}f(x,y,z) = \partial^2_{31}f(x,y,z)$ ainsi que $\partial^2_{23}f(x,y,z) = \partial^2_{32}f(x,y,z)$

   $\partial^2_{11}f(x,y,z) = e^{x(y^2+z^2+1)}(y^2+z^2+1)(2+(y^2+z^2+1)x)$ $\quad$ $\partial^2_{22}f(x,y,z) = e^{x(y^2+z^2+1)}(2x^2+4x^3y^2)$

   $\partial^2_{33}f(x,y,z) = e^{x(y^2+z^2+1)}(2x^2+4x^3z^2)$ $\quad$ $\partial^2_{12}f(x,y,z) = e^{x(y^2+z^2+1)}2xy(2+(y^2+z^2+1)x)$

   $\partial^2_{13}f(x,y,z) = e^{x(y^2+z^2+1)}2xz(2+(y^2+z^2+1)x)$ $\quad$ $\partial^2_{23}f(x,y,z) = 4x^3yze^{x(y^2+z^2+1)}$

   b) Au point critique, la Hessienne est $\begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}$

   Cette matrice est diagonale, ses valeurs propres sont les termes diagonaux $\frac{1}{e}$ et $\frac{2}{e}$ qui sont non nuls et positifs. Donc f admet un minimul local au point critique $M(-1,0,0)$ qui vaut $\frac{1}{e}$

4. a) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $y^2+z^2+1 \geq 1$

Si $x \geq 0$ $x(y^2+z^2+1) \geq x$ et par croissance de l'exponentielle $e^{x(y^2+z^2+1)} \geq e^x$ ainsi $xe^{x(y^2+z^2+1)} \geq xe^x$

Si $x < 0$, $x \geq x(y^2+z^2+1)$ donc $e^x \geq e^{x(y^2+z^2+1)}$ ainsi en multipliant par x qui est négatif, $xe^{x(y^2+z^2+1)} \geq xe^x$

b) La fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^x \end{cases}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée s'annule en -1 en changeant de signe et elle présente un minimum global en ce point qui vaut $\dfrac{-1}{e}$. Or $f(-1,0,0) = \dfrac{-1}{e}$.
Ainsi, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) \geq f(-1,0,0)$ donc le minimum est global.

5. Notons $g_1(x,y,z) = x$ et $g_2(x,y,z) = y+z$ les formes linéaires associées à la contrainte $\mathcal{C}$

Si f possède un minimum global au point $M_0(1,0,0)$ alors nécessairement $\forall H(h,k,l) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_0 + H \in \mathcal{C}$, $f(M_0+H) \geq f(M_0)$

Soit H un tel point, $M_0 + H \in \mathcal{C} \iff \begin{cases} 1+h=1 \\ k+l=0 \end{cases} \iff \begin{cases} h=0 \\ k+l=0 \end{cases}$

$f(M_0+H) - f(M_0) = (1+h)e^{(1+h)(k^2+l^2+1)} - e = e^{k^2+l^2+1}$

Or $\forall (k,l) \in \mathbb{R}^2$, $k^2+l^2+1 \geq 1$ donc $e^{k^2+l^2+1} \geq e$

Donc on a bien démontrée que $\forall H(h,k,l) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_0 + H \in \mathcal{C}$, $f(M_0+H) \geq f(M_0)$ ainsi f présente un minimum global sous la contrainte. Ce minimum prend la valeur e

6. La fonction de contrainte $\phi : (x,y,z) \mapsto x(y^2+z^2+1)$ est C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3$

$\nabla(\phi)(x,y,z) = (y^2+z^2+1, 2xy, 2xz)$. La contrainte n'est donc pas critique sur l'ouvert puisque la première coordonnée de son gradient ne s'annule nulle part.

Si f possède un extremum sous la contrainte $\mathcal{C}'$ au point (x,y,z) alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(S) : \nabla(f)(x,y,z) = \lambda \nabla(\phi)(x,y,z)$

$$(S) : \begin{cases} e^{x(y^2+z^2+1)}(1+(y^2+z^2+1)x) = \lambda(y^2+z^2+1) \\ 2x^2ye^{x(y^2+z^2+1)} = \lambda 2xy \\ 2x^2ze^{x(y^2+z^2+1)} = \lambda 2xz \end{cases}$$

Mais $(x,y,z) \in \mathcal{C}'$ donc $(S) : \begin{cases} 2e = \lambda(y^2+z^2+1) \\ 2ex^2y = \lambda 2xy \\ 2ex^2z = \lambda 2xz \end{cases}$

$f(M_0+H) - f(M_0) = (1+h)e^{(1+h)(k^2+l^2+1)} - e = ((1+h)e - e))$

Mais $(1+h) = \dfrac{1}{(k^2+l^2+1)}$ donc $0 < 1+h \leq 1$ donc $f(M_0+H) - f(M_0) \leq 0$

Ainsi $\forall H(h,k,l) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M_0 + H$ vérifie aussi la contrainte on a $f(M_0+H) - f(M_0) \leq 0$ donc f présente un maximum global en $(1,0,0)$ sous la contrainte $\mathcal{C}'$

Exercice 2

1. a) $F_X(x) : \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x}{\theta} si x \in [0, \theta] \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

   b) $E(X) = \dfrac{\theta}{2}$ $\qquad V(X) = \dfrac{\theta^2}{12}$

2. a)
```
n=input('n')
theta=input('theta')
Yn=max(grand(1,n,'unf',0,theta))
```

   b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(max(X_1, ..., X_n) \leq x) = P(\bigcap_1^n (X_i \leq x))$

   Les variables X_i étant mutuellement indépendantes et suivant la même loi que X, on a :

   $F_n(x) = P(Y_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = F(x)^n$

   D'où $F_n(x) : \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ (\dfrac{x}{\theta})^n si x \in [0, \theta] \\ 1 \text{ si } x > \theta \end{cases}$

   c) F est la fonction de répartition d'une variable à densité, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf éventuellement en 0 et θ. F_n étant la composée de F et de la fonction C^1 qui à tout réel t associe t^n est donc continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf éventuellement en 0 et θ.

   F_n est donc la fonction de répartition d'une variable à densité, dont une densité est donnée en tout point x où F_n est C^1 par $F_n'(x)$ et la valeur arbitraire 0 en 0 et θ

   Soit $f_n(x) : \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ n\dfrac{x^{n-1}}{\theta^n} \text{ si } x \in]0, \theta[\\ 1 \text{ si } x \geq \theta \end{cases}$

   d) Y_n possède une espérance car son support est compact et
   $E(Y_n) = \int_0^\theta n \dfrac{x^n}{\theta^n} dx = \dfrac{n}{(n+1)\theta^n} \theta^{n+1} = \dfrac{n}{(n+1)} \theta$

   D'autre part, Y_n est une fonction du n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ indépendante du paramètre à estimer donc c'est un estimateur de θ.

   $\lim_{n \to +\infty} E(Y_n) = \theta$ donc Y_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ

3. Z_n admet une espérance en tant que somme finie de variables admettant une espérance et par linéarité $E(Z_n) = \dfrac{\theta}{2}$

   Posons $\widehat{Z_n} = 2Z_n$ alors $\widehat{Z_n}$ est une fonction du n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ indépendante du paramètre à estimer et $E(\widehat{Z_n}) = \theta$ donc c'est un estimateur sans biais de θ

4. a) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} P(|a_n - a| \geq \varepsilon) = 0$ et $R_n \xrightarrow{\mathcal{L}} R$ donc $a_n R_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aR$ d'après le théorème de Slutsky

   b) Soit T_n un estimateur de θ possédant deux ordres de convergence α et β avec $0 < \alpha < \beta$

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^\alpha = n^{\alpha - \beta} n^\beta (T_n - \theta)$

   Posons $a_n = n^{\alpha - \beta}$, $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

   $n^\beta (T_n - \theta)$ converge en loi vers une variable aléatoire R qui n'est pas quasi certainement nulle.

   Donc en appliquant le lemme précédent, $(a_n n^\beta (T_n - \theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ va converger en loi vers la variable certaine nulle, ce qui n'est pas possible puisque $a_n n^\beta (T_n - \theta) = n^\alpha (T_n - \theta)$

5. $Y(\Omega) =]-\infty, 0]$

Soit $x > 0$, $F_Y(x) = 1$

Soit $x \leq 0$, $F_Y(x) = P(-T \leq x) = P(T \geq -x) = 1 - P(T \leq -x) = e^{\frac{x}{\theta}}$

6. a) Soit $x \geq 0$, $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = P(Y_n \leq \theta + \frac{x}{n}) = F_n(\theta + \frac{x}{n}) = 1$ car $\theta + \frac{x}{n} \geq 1$

b) De la même manière, si $x < 0$ et $n \geq \frac{-x}{\theta}$ alors $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = F_n(\theta + \frac{x}{n})$ avec $0 \leq \theta + \frac{x}{n} < \theta$ donc

$$P(n(Y_n - \theta) \leq x) = \frac{1}{\theta^n}(\theta + \frac{x}{n})^n = (1 + \frac{x}{n\theta})^n$$

c) Soit $x \geq 0$, $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = 1 = F_Y(x)$

Si $x < 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $n \geq \frac{-x}{\theta}$ et $P(n(Y_n - \theta) \leq x) = (1 + \frac{x}{n\theta})^n$

Or pour tout $n \geq n_0$, $(1 + \frac{x}{n\theta})^n = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n\theta})}$

Et $n \ln(1 + \frac{x}{n\theta}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\theta}$ donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{x}{n\theta})^n = e^{\frac{x}{\theta}}$

On a ainsi démontré que pour tout réel x, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(n(Y_n - \theta) \leq x) = F_Y(x)$

Donc $n(Y_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ et Y_n est d'ordre de convergence 1

7. a) $\widehat{Z_n} = 2Z_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (2X_i)$

b) $\widehat{Z_n}^*$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à la suite de variables indépendantes $(2X_i)$ qui possèdent même espérance $E(2X)$ et même variances $V(2X)$ donc d'après le théorème limite central $\widehat{Z_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

c) $E(2X) = 2(E(X)) = \theta$ $\qquad V(2X) = 4V(X) = \frac{\theta^2}{3}$ donc $\widehat{Z_n}^* = \frac{\sqrt{3n}}{\theta}(\widehat{Z_n} - \theta)$

Comme $\widehat{Z_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire centrée réduite alors $\sqrt{n}(\widehat{Z_n} - \theta) = \frac{\theta}{\sqrt{3}} \widehat{Z_n}^*$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{\theta^2}{3})$

Donc $\sqrt{n}(\widehat{Z_n} - \theta)$ converge en loi vers une variable non quasi-certainement nulle et par unicité de l'ordre de convergence, celui-ci vaut $\frac{1}{2}$

Exercice 3

1. a) Le théorème du rang permet d'écrire que $dim(E) = dim(Ker(p)) + dim(Im(p))$

   Soit $x \in Im(p)) \bigcap Ker(p)$ alors $\begin{cases} p(x) = 0 \\ \exists y \in E \qquad x = p(y) \end{cases}$

   $p(x) = 0 = p^2(y) = p(y)$ donc $p(y) = 0$ donc $x = 0$.
   Ainsi $Im(p)) \bigcap Ker(p) \subset \{0\}$ et comme $0 \in Im(p)) \bigcap Ker(p)$ alors $Im(p)) \bigcap Ker(p) = \{0\}$

   $\begin{cases} dim(E) = dim(Ker(p)) + dim(Im(p)) \\ Im(p)) \bigcap Ker(p) = \{0\} \end{cases}$ donc $E = Ker(p) \oplus Im(p)$

   b) Soit $x \in Im(p)$ alors $\exists y \in E$, $x = p(y)$

   Donc $x - p(x) = p(y) - p^2(y) = p(y) - p(y) = 0$ donc $x \in Ker(Id - p)$ donc $Im(p) \subset Ker(Id - p)$

   Réciproquement, si $x \in Ker(Id - p)$ alors $x = p(x)$ donc $x \in Im(p)$ d'où $Ker(Id - p) \subset Im(p)$

   Donc $Im(p) = Ker(Id - p)$

   c) Le polynôme $X^2 - X$ étant annulateur, les seules valeurs propres possibles de p sont 0 et 1

   Si p est un projecteur trivial (Id ou θ) alors sa matrice dans toute base est diagonale donc p diagonalisable.

   Si p n'est pas un projecteur trivial alors $Ker(p) \oplus Ker(Id - p) = E$ donc p est diagonalisable.

   Ainsi dans une base de diagonalisation, la matrice de p s'écrit avec $dim(ker(p))$ zéros sur la diagonale et $dim(Ker(p - Id))$ uns sur la diagonale donc
   $Tr(p) = dim(Ker(p - Id)) = dim(Im(p)) = rg(p)$

2. Initialisation : soit E_1 un sev de E alors $dim(E_1) \leq dim(E_1)$ donc la propriété est initialisée.

   Hérédité : supposons qu'il existe un entier n non nul tel que pour tout $E_1, ..., E_n$ sev de E on ait $dim(E_1 + ... + E_n) \leq dim(E_1) + ... + dim(E_n)$

   Soit E_{n+1} un sev alors
   $dim(E_1 + ... + E_{n+1}) = dim(E_1 + ... + E_n) + dim(E_{n+1}) - dim(E_1 + ... + E_n) \bigcap E_{n+1})$

   Donc $dim(E_1 + ... + E_{n+1}) \leq dim(E_1 + ... + E_n) + dim(E_{n+1})$

   Et en appliquant la récurrence à l'ordre n : $dim(E_1 + ... + E_{n+1}) \leq dim(E_1) + ... + dim(E_n) + dim(E_{n+1})$

3. Supposons que $p_i \circ p_j = \theta$ si $i \neq j$

   Alors $q_k^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i^2 + \sum_{(i,j) \in [\![1,k]\!], i \neq j} p_i \circ p_j = \sum_{i=1}^{k} p_i^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i = q_k$

   Donc q_k est un projecteur.

4. a) Soit $x \in Im(q_k)$, $\exists y \in E$, $x = q_k(y) = (p_1 + ... + p_k)(y) = p_1(y) + ... + p_k(y)$

   Or $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $p_i(y) \in Im(p_i)$

   Donc $x \in Im(p_1) + ... + Im(p_k)$ d'où $Im(q_k) \subset Im(p_1) + ... + Im(p_k)$

b) Par linéarité de la trace, $Tr(q_k) = dim(Im(q_k)) = \sum_{i=1}^{k} Tr(p_i) = \sum_{i=1}^{k} dim(Im(p_i))$

D'après la question précédente, on a $dim(Im(q_k)) \leq dim(Im(p_1) + ... + Im(p_k))$

Et comme $dim(Im(p_1) + ... + Im(p_k)) \leq \sum_{i=1}^{k} dim(Im(p_i))$

Alors nécessairement $dim(Im(q_k)) = dim(Im(p_1) + ... + Im(p_k))$

Ainsi les deux ensembles ont même dimension donc $Im(q_k) = Im(p_1) + ... + Im(p_k)$

c) Montrons que la somme $Im(p_1) + ... + Im(p_k)$ est directe en montrant que 0 se décompose de manière unique.

Soit $(x_1, ..., x_k) \in Im(p_1) + ... + Im(p_k)$ tel que $0 = x_1 + ... + x_k$

Donc $\exists (y_1, ..., y_k) \in E,\ 0 = p_1(y_1) + ... + p_k(y_k)$

On applique p_1 à cette égalité :

$p_1(0) = 0 = p_1^2(y_1) + 0$ car si $j \neq 1$, $p_1 \circ p_j = \theta$

Or $p_1^2(y_1) = p_1(y_1) = x_1$ donc $x_1 = 0$

On démontre de même que $\forall j \in [\![1, k]\!]$, $x_j = 0$ ainsi la décomposition de 0 est unique et la somme est directe.

5. a) Soit $j \in [\![1, k]\!]$, montrons que $Im(p_j) \subset Im(q_k) = Ker(Id - q_k)$ ainsi pour tout $x \in E$ on aura $p_j(x) \in Im(p_j)$ et donc $p_j(x) - q_k(p_j(x)) = 0$ ce qui achèvera la démonstration.

Soit $x \in Im(p_j)$, alors $0 + 0 + ... + x + ... + 0 \in Im(p_1) \oplus ... \oplus Im(p_j) \oplus ...Im(p_k)$
or $Im(q_k) = Im(p_1) \oplus ... \oplus Im(p_j) \oplus ...Im(p_k)$ donc $x \in Im(q_k)$

b) Soit $x \in E$ alors $p_j(x) = q_k \circ p_j(x) = p_j \circ p_j(x) + \sum_{i=1, i\neq j}^{k} p_i(p_j(x)) = p_j(x) + \sum_{i=1, i\neq j}^{k} p_i(p_j(x)$

Donc $\sum_{i=1, i\neq j}^{k} p_i(p_j(x)) = 0$

c) Soit $x \in E$. Soit $j \in [\![1, k]\!]$, par unicité de la décomposition sur la somme directe $Im(p_1) \oplus ... \oplus Im(p_k)$ on a :

$p_j(x) = 0 + ... + p_j(x) + ...0 = p_j(x) + \sum_{i=1, i\neq j}^{k} p_i(p_j(x))$

Or pour $i \neq j$, on a $0 \in Im(p_i)$ mais aussi $p_i(p_j(x)) \in Im(p_i)$ donc nécessairement $p_i(p_j(x)) = 0$ car la somme est directe.

Comme cela est vrai pour tout $x \in E$ alors $p_i \circ p_j = \theta$

Donc $\forall (i, j) \in [\![1, k]\!]$, $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$

6. On a trouvé une condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur à savoir que $p_1 + ... + p_k$ est un projecteur si et seulement si $\forall (i, j) \in [\![1, k]\!]$, $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$

Problème

1. a) `u=sum(1 ./x)-log(n)`

   b) Soit $k \neq 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[k, k+1]$ et décroissante.

   Donc, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

   Donc par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \text{ soit}$$
   $$\frac{1}{k+1} \leq ln(k+1) - ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $ln(k+1) - ln(k) \leq \frac{1}{k}$

   On somme ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$:

   $ln(n) - ln(1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et en rajoutant $\frac{1}{n}$ de chaque côté : $\frac{1}{n} \leq u_n$ donc $u_n \geq 0$

   De même on a : $\frac{1}{k+1} \leq ln(k+1) - ln(k)$

   D'où en sommant, cette fois entre 1 et $n-1$: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq ln(n)$

   En changeant d'indice dans la somme et en ajoutant et ôtant 1 côté gauche :
   $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leq lnn$ donc $u_n \leq 1$

2. a) $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} t^p = \frac{1-t^n}{1-t}$ (car $t \neq 1$)

   b) Les fonctions intervenants dans la question précédente étant continues sur $[0, x]$, on peut intégrer :

   $\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

   Soit par linéarité de l'intégrale dans la somme finie à gauche :

   $\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

   c) $\forall t \in [0, x]$, $1 - t \geq 1 - x \geq 0$ donc $\frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$

   D'autre part $\forall t \in [0, x]$, $\frac{t^n}{1-t} \geq 0$

   On peut intégrer ces deux inégalités entre 0 et x et les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant :

   $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1-x}$

   Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = 0$ puisque $x \in [0, 1[$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1-x} = 0$ et ainsi par encadrement $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$

   d) On peut ainsi passer à la limite dans l'égalité de la question b) et la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{p \geq 1} \frac{x^p}{p}$ admet pour limite $-ln(1-x)$ donc la série converge et sa somme vaut $-ln(1-x)$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_j bk - j = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=j}^{n} b_{k-j}$
   (inversion de containtes $1 \leq j \leq k \leq n$)

D'autre part $(\sum_{k=1}^{n} a_k)(\sum_{k=0}^{n} b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n} b_j$

Or, tous les termes intervenants étant positifs, $\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=j}^{n} b_{k-j} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n} b_k$

donc $\sum_{k=1}^{n} c_k \leq (\sum_{j=1}^{n} a_j)(\sum_{k=0}^{n} b_k)$

On montre de même que $\sum_{k=1}^{2n} c_k \geq (\sum_{j=1}^{n} a_j)(\sum_{k=0}^{n} b_k)$

b) Les séries à termes positifs $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, soit A et B leurs sommes respectives. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\sum_{j=1}^{n} a_j)(\sum_{k=0}^{n} b_k) \leq AB$

D'après la question précédente, on en déduit que la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum c_n$ est majorée donc la série converge, soit C sa somme.

Par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on a ainsi $C \leq AB \leq C$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \leq (\sum_{n=1}^{+\infty} a_n)(\sum_{k=0}^{+\infty} b_n)$

c) i. La convergence de la série de terme général a_k a été démontrée à la question $2d$. Quant à la série de terme général b_k, il s'agit du terme général d'une série géométrique convergente puisque $0 \leq |x| < 1$

ii.
```
a=(x .^u) ./u
b=[1,x .^u]
c=sum(a .*b(v))
```

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} x^{n-k} = x^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

4. a) On applique ce qu'on a vu dans la première partie. Les séries $\sum \frac{x^n}{n}$ et $\sum x^n$ sont à termes positifs et convergent. La série c_n construite sur ces 2 séries et dont on vient de calculer le terme générique $c_n = x^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ converge et on a l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n})((\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)$$

b) On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ et que d'après la première partie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -ln(1-x)$

Donc $x^n \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{-ln(1-x)}{1-x}$

5. a) Par concavité du logarithme, $\forall x > 0$, $ln(x) \leq x - 1 \leq x$

b) $\forall n \geq 1$, $0 \leq (lnn)x^n \leq nx^n$

Or la série à termes positifs de terme général nx^{n-1} est convergente en tant que série géométrique dérivée d'ordre 1 avec $0 \leq |x| < 1$ donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum (lnn)x^n$ converge.

6. a) $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - lnn \leq 1$