CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur, à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer à l'ESSEC Business School.

Exercice I

1. a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

On cherche un polynôme annulateur P de degré 2 donc 3 réels (a,b,c) tels que $P(A) = aA^2 + bA + cI = O$ (où O est la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$)

En écrivant les termes de la première colonne de $P(A)$ on obtient les 3 équations :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -6a-2b=0 \\ -3a-b=0 \end{cases}$$

Ce système est de rang 2 et une solution est $(1,-3,2)$ et on vérifie que le polynôme

$\boxed{P(X) = X^2 - 3X + 2 \text{ est bien annulateur de } A}$

b) Les racines de P sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ donc $\boxed{Sp(A) \subset \{1,2\}}$

c) r_1 est le rang de $A - I$. On a $r_1 \neq 3$ donc $A - I$ non inversible donc 1 est valeur propre. De plus, grâce au théorème du rang, on a $dim(ker(A-I)) = 2$ donc la dimension du sous-espace propre associé à 1 est 2

De même, r_2 est le rang de $A - 2I$ et $r_2 \neq 3$ donc $A - 2I$ non inversible donc 2 est valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé est 1

d) Soit $x \in Ker(f - Id)$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base canonique.

$$x \in Ker(f-Id) \iff (S) : (A-I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0=0 \\ -2a+2b-2c=0 \\ -a+b-c=0 \end{cases} \iff -a+b-c=0$$

D'où $\boxed{Ker(f-Id) = Vect\{(1,0,-1)(0,1,1)\}}$

Soit $x \in Ker(f - 2Id)$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base canonique.

$$x \in Ker(f-2Id) \iff (S) : (A-2I)X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} -a=0 \\ -2a+b-2c=0 \\ -a+b-2c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=2c \end{cases}$$

D'où $\boxed{Ker(f-2Id) = Vect\{(0,2,1)\}}$

2. a) $dim(ker(f-Id)) + dim(Ker(f-2Id)) = 3$ donc f est diagonalisable et il existe donc une base formée de vecteurs propres (dans laquelle la matrice de f est d'ailleurs diagonale).
Compte tenu des hypothèses, on pose $u_1 = (1,1,0)$ ($u_1 \in Ker(f-Id)$ car somme des vecteurs de la base de $Ker(f-Id)$ trouvés à la question 1) d)) et $v_2 = (0,2,1) \in Ker(f-2Id)$
Il reste à déterminer v_1 de coordonnées $(0,a,b)$ tel que $v_1 \in Ker(f-Id)$ et (u_1,v_1) forme une famille libre.
Prenons $v_1 = (0,1,1)$, il vérifie bien les conditions définies ci-dessus.
D'où $\boxed{u_1 = (1,1,0); v_1 = (0,1,1); v_2 = (0,2,1)}$

b) Soient (x_1,x_2,x_3) les coordonnées de x dans la base (u_1,v_1,v_2) alors $x = x_1u_1 + x_2v_1 + x_3v_2$
Donc $(S) : \begin{cases} x_1 = a \\ x_2+2x_3 = b-a \\ x_2+x_3 = c \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = a \\ x_2+2x_3 = b-a \\ x_3 = b-a-c \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a-b+2c \\ x_3 = -a+b-c \end{cases}$

3. a) Soient $(e_1,...,e_n)$ les vecteurs composant la base $\mathscr{B}$ Comme la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est diagonale alors les e_i sont vecteurs propres.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\exists j \in [\![1,p]\!]$, $f(e_i) = \lambda_j e_i$
Soit E_i le vecteur colonne correspondant à e_i, on a alors $DE_i = \lambda_j E_i$ donc $(D-\lambda_j)E_i = O$
Dans le produit $\prod\limits_{k=1}^{p}(D-\lambda_k I_n)$ les termes commutent car toutes les matrices sont diagonales, donc
$\prod\limits_{k=1}^{p}(D-\lambda_k I_n)E_i = (\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{p}(D-\lambda_k I_n))(D-\lambda_j)E_i = 0$
Donc $\prod\limits_{k=1}^{p}(f-\lambda_k Id)$ s'annule sur tous les vecteurs d'une base donc cet endormorphisme est l'endomorphisme nul.
$\boxed{(D-\lambda_1 I_n)...(D-\lambda_p I_n) = O_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}$

b) Le polynôme $\prod\limits_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)$ est annulateur de f

4. a) $L_k(\lambda_k) = 1$ et $L_k(\lambda_i) = 0$ si $i \neq k$ (classique des Polynômes de Lagrange)
b) $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $deg(L_i) = p-1$ donc $L_i \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$
$dim(\mathbb{R}_{p-1}[X]) = p$ et la famille $(L_1,...,L_p)$ est a priori de cardinal p. Pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ il suffit donc de montrer qu'elle est libre.
Soit $(\mu_1,...,\mu_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{p}\mu_i L_i = O_{\mathbb{R}_{p-1}[X]}$
Alors $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{p}\mu_i L_i(\lambda_j) = 0$ soit $\mu_j = 0$ (seul terme restant).
Donc $(\mu_1,...,\mu_p) = (0,..,0)$ la famille est libre.
$\boxed{(L_1,...,L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{p-1}[X]}$
c) Soit $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $\exists(\mu_1,...,\mu_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $P = \sum\limits_{i=1}^{p}\mu_i L_i$
Donc $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $P(\lambda_j) = \sum\limits_{i=1}^{p}\mu_i L_i(\lambda_j)$ soit $\mu_j = P(\lambda_j)$
Donc $\boxed{P = \sum\limits_{i=1}^{p}P(\lambda_i)L_i}$

d) On applique la relation précédente au polynôme constant 1

$1=\sum_{i=1}^{p} 1.L_i=\sum_{i=1}^{p} L_i$

5. a) Soit $x\in E$, $(f-\lambda_k Id)oL_k(f)(x)=(\frac{1}{\prod_{i=1,i\neq k}^{p}\lambda_k-\lambda_i}\prod_{j=1}^{p}(f-\lambda_j Id))(x)$ car f commute avec toutes ses puissances et avec Id

Or le polynôme $\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)$ est annulateur de f donc $(\frac{1}{\prod_{i=1,i\neq k}^{p}\lambda_k-\lambda_i}\prod_{j=1}^{p}(f-\lambda_j Id))(x)=O_E$

Donc $\boxed{L_k(f)(x)\in Ker(f-\lambda_k Id)}$

b) $1=\sum_{i=1}^{p} L_i$ donc $Id=\sum_{i=1}^{p} L_i(f)$

Soit $x\in E$, $Id(x)=x=\sum_{i=1}^{p} L_i(f)(x)$ ce qui correspond à la décomposition cherchée compte tenu de la réponse à la question précédente

6. On a $L_1=2-X$ et $L_2=X-1$

Soit $x=(a,b,c)\in E$ (coordonnées dans la base canonique),

$L_1(f)(x)=2x-f(x)$, $L_2(f)(x)=f(x)-x$

$L_1(f)(x)=(a,2a-b+2c,a-b+2c)=au_1+(a-b+2c)v_1$

$L_2(f)(x)=(-a+b-c)v_2$

On retrouve bien la décomposition trouvée en première partie

Exercice II

1. a) $\forall x\in\mathbb{R}, Arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

b) $Arctan(1)=\frac{\pi}{4}$ car $\tan(\frac{\pi}{4})=1$

La fonction $f:\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\\ x\mapsto Arctan(x)+Arctan(\dfrac{1}{x})\end{cases}$

est dérivable comme composée puis somme de fonctions dérivables

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$

f est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et égale à sa valeur en 1 soit $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$

D'où $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*, Arctan(x)+Arctan(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}}$

c) $Arctan$ est dérivable en 0 donc elle admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0

$Arctan(x)=Arctan(0)+Arctan'(0)x+\underset{0}{o}(x)=x+\underset{0}{o}(x)$

Donc $\boxed{Arctan(x)\underset{0}{\sim}x}$

2. a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction polynomiale ne s'annulant pas

La fonction f est paire donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Soit $A>0$, $\int_0^A f(t)dt = \frac{1}{\pi}Arctan(A)$

Or $\lim_{A\to+\infty} Arctan(A) = \frac{\pi}{2}$

D'où $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(t)dt = \frac{1}{2}$ donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et par parité :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\frac{1}{2} = 1$

Donc $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$

b) Soit $x\in\mathbb{R}$, $F(x) = \lim_{B\to-\infty}\int_B^x f(t)dt$

Or $\int_B^x f(t)dt = \frac{1}{\pi}(Arctan(x) - Arctan(B))$

Et $\lim_{B\to-\infty}\frac{1}{\pi}(Arctan(x) - Arctan(B)) = \frac{Arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$

$\boxed{F(x) = \frac{Arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}}$

3. a) g est définie sur $\mathbb{R}$

g est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$

g est continue sur $]-\infty,0]$ en tant que fonction constante

g est continue sur $]0,+\infty[$ comme produit d'une fraction rationnelle ne s'annulant pas et de la composée d'une fraction rationnelle ne s'annulant pas par la fonction exponentielle.

Donc g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge car g est nulle sur $]-\infty,0]$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est doublement impropre en 0 et en $+\infty$

Soient ε et A deux réels strictement positifs :

$\int_\varepsilon^A \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx = e^{-\frac{1}{A}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$

Or $\lim_{A\to+\infty} e^{-\frac{1}{A}} = 1$ car $\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A} = 0$

Et $\lim_{\varepsilon\to0} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = 0$ car $\lim_{\varepsilon\to0} -\frac{1}{\varepsilon} = -\infty$

Donc $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge et vaut 1 donc g est une densité de probabilité

b) Soit $x\in\mathbb{R}$

Si $x\leq 0$, $G(x) = 0$

Si $x>0$, $G(x) = \int_0^x g(t)dt = \lim_{\varepsilon\to0} e^{-\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = e^{-\frac{1}{x}}$

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \end{cases}}$$

4. a) Soit $x\in\mathbb{R}$, $F_{M_n}(x) = P(M_n\leq x) = P(\bigcap_{i=1}^n (X_i\leq x))$

Donc, par indépendance des X_i et étant donné que ces variables ont même loi que X on a :

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F_{M_n}(x) = [F(x)]^n}$

b) $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = P(\frac{\pi}{n}M_n \leq x) = [F(\frac{nx}{\pi})]^n = [\frac{1}{\pi}Arctan(\frac{nx}{\pi}) + \frac{1}{2}]^n$

5. a) Soit $x \leq 0$

Si $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) = \frac{1}{2^n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(0) = 0$

Si $x < 0$, $G_n(x) = e^{n\ln(\frac{1}{\pi}Arctan(\frac{nx}{\pi})+\frac{1}{2})}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}Arctan(\frac{nx}{\pi}) + \frac{1}{2} = 0$

Donc par continuité de ln, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{\pi}Arctan(\frac{nx}{\pi}) + \frac{1}{2}) = -\infty$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(\frac{1}{\pi}Arctan(\frac{nx}{\pi})+\frac{1}{2})} = 0$

$\boxed{\forall x \leq 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 0}$

b) Soit $x > 0$, soit $n > 0$

On a $Arctan(\frac{nx}{\pi}) = \frac{\pi}{2} - Arctan(\frac{\pi}{nx})$ en utilisant la question 1)b)

$\boxed{\forall x > 0, \forall n > 0, G_n(x) = (1 - \frac{1}{\pi}Arctan(\frac{\pi}{nx}))^n}$

c) Soit $x > 0$, $G_n(x) = e^{n\ln(1-\frac{1}{\pi}Arctan(\frac{\pi}{nx}))}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{nx} = 0$ donc $Arctan(\frac{\pi}{nx}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{nx}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1 - \frac{1}{\pi}Arctan(\frac{\pi}{nx})) = \frac{-1}{x}$

D'où par continuité de exponentielle, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x}} = G(x)}$

d) Si $x \leq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 0 = G(x)$

Si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x}} = G(x)$

Donc en tout point où G est continue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$

Donc $\boxed{(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathscr{L}} Y}$

Exercice III

1. a) Supposons que u^* existe.

Soit $y \in E$, la base étant orthonormée :

$u^*(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} < u^*(y), e_i > e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} < e_i, u^*(y) > e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} < u(e_i), y > e_i$

b) Soit v un autre endormorphisme vérifiant les mêmes propriétés. $\forall y \in E$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$:

$< u(e_i), y > = < e_i, u^*(y) > = < e_i, v(y) >$

donc $< e_i, u^*(y) > = < e_i, v(y) >$

donc $< e_i, (u^* - v)(y) > = O_E$

donc $(u^* - v)(y) \in Vcct\{e_1, \ldots, e_n\}^{\perp}$

donc $(u^* - v)(y) \in E^{\perp} = \{O_E\}$

donc $u^*(y) = v(y)$ et ce $\forall y \in E$

donc $\boxed{u^* = v}$

2. a) u^* est à valeurs dans E puisqu'à tout élément y, u^* associe une combinaison linéaire des e_i

Soient $(y, y') \in E^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$u^*(\lambda y + y') = \sum\limits_{i=1}^{n} < u(e_i), \lambda y + y' > e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} [\lambda < u(e_i), y > + < u(e_i), y' >] e_i = \lambda u^*(y) + u^*(y')$

$\boxed{u^* \in \mathscr{L}(E)}$

b) En cas d'existence de l'adjoint, l'unicité a été démontrée à la question 1)b)
Pour montrer que u^* tel que défini par 1) a) est solution du problème posé, il suffit de montrer par bilinéarité du produit scalaire que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $< u(e_i), e_j >=< e_i, u^*(e_j) >$
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$< e_i, u^*(e_j) >=< e_i, \sum_{k=1}^{n} < u(e_k), e_j > e_k >=< e_i, < u(e_i), e_j > e_i >=< u(e_i), e_j > \text{ car } < e_i, e_i >= 1$$

Soient $(x,y) \in E$, x peut s'écrire $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

Alors $< u(x), y >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j < u(e_i), e_j >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j < e_i, u^*(e_j) >=< x, u^*(y) >$

Donc u^* répond bien au problème posé

3. Si f est symétrique alors $\forall (x,y) \in E^2$, $< f(x), y >=< x, f(y) >$
Donc par unicité de l'adjoint, nécessairement $\boxed{f^* = f}$
Et $fof^* = fof = f^*of$ et f est normal

4. a) Soit $x \in E$, $\| u(x) \|^2 =< u(x), u(x) >=< x, u^* \circ u(x) >$ or u est normal,
Donc $\| u(x) \|^2 =< x, u \circ u^*(x) >=< u \circ u^*(x), x >=< u^*(x), u^*(x) >=\| u^*(x) \|^2$
Donc $\boxed{\forall x \in E \ \| u(x) \| = \| u^*(x) \|}$

b) $x \in Ker(u) \iff u(x) = O_E \iff \| u(x) \| = 0 \iff \| u^*(x) \| = 0 \iff u^*(x) = O_E \iff x \in Ker(u^*)$
Donc $\boxed{Ker(u) = Ker(u^*)}$

5. Soit $y \in F^\perp$, montrons que $\forall x \in F$, $< x, u^*(y) >= 0$
Soit $x \in F$, $< x, u^*(y) >=< u(x), y >$
Or $u(x) \in F$ par stabilité et $y \in F^\perp$ donc $< u(x), y >= 0$ donc $< x, u^*(y) >= 0$ donc $u^*(y) \in F^\perp$
$\boxed{F^\perp \text{ stable par } u^*}$

6. a) Soit $x \in E_\lambda$ alors $u(x) = \lambda x$
$u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x)$ donc $u^*(x) \in E_\lambda$
$\boxed{E_\lambda \text{ stable par } u^*}$

b) u vérifie la propriété de caractérisation de l'adjoint de u^*
En effet, soit $(x,y) \in E^2$, $< u^*(x), y >=< y, u^*(x) >=< u(y), x >=< x, u(y) >$
Donc par unicité de l'adjoint, $(u^*)^* = u$

E_λ stable par u, donc $E\lambda^\perp$ stable par u^* d'après 5) donc $E\lambda^\perp$ stable par $(u^*)^* = u$ d'après 6 a)
$\boxed{E\lambda^\perp \text{ stable par } u}$

Problème

1. $G(1) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1$

2. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale

$\forall t \in \mathbb{R}$, $G'(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X=k)t^{k-1}$

$G'(1) = \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X=k) = E(X)$

$\boxed{E(X) = G'(1)}$

3. G est 2 fois dérivable car polynomiale

$\forall t \in \mathbb{R}$, $G"(t) = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k)t^{k-2} = \sum\limits_{k=2}^{n} k^2P(X=k)t^{k-2} - \sum\limits_{k=2}^{n} kP(X=k)t^{k-2}$

Donc $G"(1) = \sum\limits_{k=2}^{n} k^2P(X=k) - \sum\limits_{k=2}^{n} kP(X=k) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2P(X=k) - \sum\limits_{k=1}^{n} kP(X=k)$

Or $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2P(X=k) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = V(X) + (G'(1))^2$

Et $\sum\limits_{k=1}^{n} kP(X=k) = E(X) = G'(1)$

Donc $G"(1) = V(X) + (G'(1))^2 - G'(1)$

$\boxed{V(X) = G"(1) + G'(1) - (G'(1))^2}$

4. a) La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ est C^1 et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

On intègre cette inégalité entre k et $k+1$:

$\frac{1}{k+1} \leq \int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}$

D'où $\boxed{\frac{1}{k+1} \leq ln(k+1) - ln(k) \leq \frac{1}{k}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité précédente est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

Donc $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} (ln(k+1) - ln(k))$ donc $u_n - 1 \leq \ln n - 0$

$\boxed{u_n \leq \ln n + 1}$

De même $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (ln(k+1) - ln(k)) \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ donc $\ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$

$\boxed{\ln n + \frac{1}{n} \leq u_n}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n \ln n} = 1$

De même $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{\ln n} = 1$

Donc, par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$

Donc $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$

5. $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles d'une série de Riemann convergente donc cette suite converge

6.
```
(6)       aux=A(j)
(7)       A(j)=A(p)
(8)       A(p)=aux
```

7. a) La boucle for recherche et affecte à m le plus grand entier parmi une permutation réalisée sur $\{1, ..., n\}$ et ce plus grand entier est nécessairement n

b) c est la "place" de n dans la permutation réalisée par le premier script (c'est à dire l'indice k tel que $A(k) = n$)

c)
```
c=find (A==n)
```

8. Lorsque $n = 1$ alors nécessairement on a une seule affectation de c car on affecte 1 en début d'algorithme et la boucle for ne réalise aucune itération. Donc X_1 est la variable certaine égale à 1

9. a) n peut prendre toutes les positions possibles dans le vecteur A puisque les permutations sont équiprobables.
Si n est en première position, c prend la valeur 1 d'initialisation car la boucle *for* ne change pas sa valeur puisqu'elle suit toujours la partie *else* (implicite) du *if*
Si n est à une autre position, c prend l'affectation 1 en début d'algorithme puis un nombre d'affectations résultantes de la boucle *then* comprise entre 1 et $n-1$ suivant la permutation, donc au total c prend entre 2 et n affectations. La valeur maxi est atteinte avec la permutation $[1, 2, 3, ..., n-1, n]$
$\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$

b) $(X_n = 1)$ signifie que n est en première position et qu'ensuite les autres entiers entre 1 et $n-1$ sont aléatoirement rangés de manière équiprobable.
Le nombre total de permutations possibles est $n!$, le nombre total de permutations où n est fixé en première position est $(n-1)!$
$\boxed{P(X_n = 1) = \frac{1}{n}}$
Pour $(X_n = n)$. n est fixé en dernière position du vecteur A et nécessairement les entiers sont rangés dans l'ordre croissant. Une seule permutation réalise $(X_n = n)$ c'est $[1, 2, 3, ..., n]$ donc $P(X_n = n) = \frac{1}{n!}$
$\boxed{P(X_n = n) = \frac{1}{n!}}$

Loi de X_2 :
$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X_2 = 2) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

Loi de X_3 :
$P(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$, $P(X_3 = 3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$
$P(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

c) $((An = n), (An < n))$ forme un système complet d'événements pour $n > 2$
Soit $j \in [\![2, n]\!]$, en appliquant la formule des probabilités totales on a
$P(X_n = j) = P_{(An=n)}(X_n = j)P(An = n) + P_{(An<n)}(X_n = j)P(An < n)$
$P(A_n = n) = \frac{1}{n}$ donc $P(An < n) = \frac{n-1}{n}$
Si $(A_n = n)$ est réalisé alors nécessairement c va prendre une affectation lors de la dernière itération de la boucle *for*. Donc réaliser $(X_n = n)$ sachant que $(A_n = n)$ est réalisé revient en termes de probabilités à réaliser $j-1$ affectations avec l'ensemble de départ $\{1, ..., n-1\}$ puisque la dernière affectation est imposée par le fait que n est en dernière position. D'où $P_{(A_n=n)}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j-1)$
Si $(A_n < n)$ est réalisé, au maximum, c prendra $n-1$ affectations car n n'est pas placé en dernière position du vecteur A, donc on peut "enlever" l'entier présent dans la case $A(n)$, quelle que soit sa valeur, elle n'ajoutera pas d'affectations à c donc les j affectations auront eu lieu à l'initialisation puis pendant $n-2$ itérations de la boucle *for* donc avec la même probabilité que j affectations avec $n-1$ entiers. Donc $P_{(An<n)}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j)$
$\boxed{P(X_n = j) = \frac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j)}$

d) $P(X_4 = 1) = \frac{1}{4}$
$P(X_4 = 4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

$P(X_4=3)=\frac{1}{4}P(X_3=3)+\frac{3}{4}P(X_3=3)=\frac{1}{4}$
$P(X_4=2)=1-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}=\frac{11}{24}$

10. a) Si $j=1$ l'événement $(X_{n-1}=0)$ est impossible, sa probabilité est nulle. L'événement $(X_{n-1}=1)$ a comme probabilité $\frac{1}{n-1}$.
Donc $\frac{1}{n}P(X_{n-1}=0)+\frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=1)=\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}=P(X_n=1)$

b) Soit $n\geq 2$ et $t\in\mathbb{R}$
$G_n(t)=\sum_{k=1}^{n}P(X_n=k)t^k$
$G_n(t)=P(X_n=1)t+\sum_{k=2}^{n}[\frac{1}{n}P(X_{n-1}=k-1)+\frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=k]t^k$
Dans la première somme, on effectue le changement d'indice $k\longleftarrow k-1$ et on sort un t.
$G_n(t)=P(X_n=1)t+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t}{n}P(X_{n-1}=k)t^k+\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n-1}P(X_{n-1}=k)t^k$
On sait que $P(X_n=1)=\frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=1)$ on réinjecte donc ce terme sous cette forme dans la 2e somme et on obtient :
$$\boxed{G_n(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t}{n}P(X_n-1=k)t^k+\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}P(X_{n-1}=k)t^k=\frac{t+n-1}{n}G_{n-1}(t)}$$

c) Récurrence immédiate

11. (*) peut se dériver car G_n et $\frac{t+n-1}{n}G_{n-1}(t)$ sont polynomiales.
$\forall t\in\mathbb{R},\ G_n'(t)=\frac{1}{n}[G_{n-1}(t)+(t+n-1)G_{n-1}'(t)]$
On applique cette relation en $t=1$
$E_n=G_n'(1)=\frac{1}{n}[1+nE_{n-1}]$
$\boxed{E_n=E_{n-1}+\frac{1}{n}}$
$E_1=E(X_1)=1=u_1$
Une récurrence immédiate montre alors que $E_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

12. a) Sous les mêmes conditions, on peut dériver une deuxième fois (*) et on obtient :
$\forall t\in\mathbb{R},\ G_n"(t)=\frac{1}{n}(2G_{n-1}'(t)+(t+n-1)G_{n-1}"(t))$
On applique cette égalité en $t=1$
$G_n"(1)=V_n-G_n'(1)+(G_n'(1))^2=\frac{2G_{n-1}'(1)}{n}+G_{n-1}"(1)$
Donc $V_n-E_n+(E_n)^2=\frac{2E_{n-1}}{n}+V_{n-1}-E_{n-1}+(E_{n-1})^2$
Donc $V_n-V_{n-1}=u_n-u_{n-1}+u_{n-1}^2-u_n^2+\frac{2u_{n-1}}{n}$
Mais $u_{n-1}^2-u_n^2=(u_{n-1}+u_n)(u_{n-1}-u_n)=-\frac{1}{n}(2u_{n-1}+\frac{1}{n})=-2u_{n-1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$
D'où $\boxed{V_n-V_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$

b) Par télescopage en sommant entre 2 et n on obtient :
$V_n-V_1=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n^2}$
Mais $V_1=0$ car X_1 est la variable certaine égale à 1 et comme $\frac{1}{1}=\frac{1}{1^2}$ on a :
$V_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=u_n-h_n$
$\boxed{V_n=u_n-h_n}$

c) $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc $h_n=\underset{+\infty}{\circ}(\ln n)$
Or $u_n\underset{+\infty}{\sim}\ln n$
Donc $u_n-h_n\underset{+\infty}{\sim}\ln n$
$\boxed{V_n\underset{+\infty}{\sim}\ln n}$