# CORRIGÉ

*Par Bernard Delacampagne, professeur en CPGE au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.*

## Exercice 1

**1.a.** Rappelons que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad-bc \neq 0$, et que, dans ce cas, sa matrice inverse est $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Ici, pour la matrice P, on a :

$$ad-bc = 1.(-1)-1\cdot 1 = -2$$

Puisque $ad-bc \neq 0$, **P est inversible** et l'application du rappel donne :

$$\mathbf{P^{-1}} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

**b.** On a :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A$$

Ce résultat peut encore s'écrire, en notant 0 la matrice nulle d'ordre 2 :

$$A^2 - 2A = 0$$

Ceci assure que **le polynôme $X^2-2X$ est un polynôme annulateur de la matrice A**.
Les valeurs propres possibles de A sont les racines du polynôme annulateur $X^2-2X$, et on a :

$$X^2-2X = 0 \Leftrightarrow X(X-2) = 0 \Leftrightarrow (X=0 \text{ ou } X=2)$$

Donc **les valeurs propres possibles de A sont 0 et 2**.

**c.** On a :

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2U \text{ et } AV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0V$$

Puisque $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **U et V sont des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres 2 et 0**.

**d.** D'après les deux questions précédentes, les valeurs propre de A sont 0 et 2 ; P est la matrice dont les vecteurs colonnes sont dans cet ordre les vecteurs propres U et V de A, et D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont dans cet ordre les valeurs propres associées à U et V, donc A est diagonalisable et on a l'égalité :

$$\mathbf{P^{-1}AP = C}$$

**2.a.** On a :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A+I_2} \text{ et } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{C+I_2}$$

**b.** Il vient, d'après la question précédente et la question 1.c :

$$\mathbf{P^{-1}BP} = P^{-1}(A+I_2)P = P^{-1}AP + P^{-1}I_2P = C + P^{-1}P = C + I_2 = \mathbf{D}$$

**3.a.** Montrons par récurrence la propriété $P_n$, définie pour tout entier naturel n, par :

$$P^{-1}B^nP = D^n$$

<u>Initialisation</u> :
$P_0$ est vraie car on a :

$$P^{-1}B^0P = P^{-1}I_2P = P^{-1}P = I_2 = D^0$$

Hérédité :

On suppose $P_n$ vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$P^{-1}B^nP = D^n$$

On montre que $P_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire :

$$P^{-1}B^{n+1}P = D^{n+1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.b :

$$D^{n+1} = D^nD = P^{-1}B^nPP^{-1}BP = P^{-1}B^nI_2BP = P^{-1}B^nBP = P^{-1}B^{n+1}P$$

Ceci assure que $P_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{P^{-1}AB^nP = D^n}$$

**b.** D étant une matrice diagonale, $D^n$ s'obtient en élevant à la puissance n les termes de la diagonale de D ; il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{D^n} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3^n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

**c.** D'après la question 3.a, on a, pour tout entier naturel n, l'équivalence :

$$P^{-1}B^nP = D^n \Leftrightarrow B^n = PD^nP^{-1}$$

En utilisant la question 3.b, il vient donc, pour tout entier naturel n :

$$\mathbf{B^n} = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n & 1 \\ 3^n & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{3^n+1} & \mathbf{3^n-1} \\ \mathbf{3^n-1} & \mathbf{3^n+1} \end{pmatrix}$$

**4.a.** Antoine sert en premier et le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\frac{2}{3}$, donc on a :

$$\mathbf{a_1} = P(A_1) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Puis, le joueur qui a le service le perd avec une probabilité $\frac{1}{3}$, on a :

$$\mathbf{b_1} = P(B_1) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A_1, B_1\}$, il vient :

$$\mathbf{a_2} = P(A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$$

**b.** On observe qu'Antoine emporte le deuxième échange. La probabilité qu'il ait emporté le premier échange est :

$$\mathbf{P_{A_2}(A_1)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_1)P_{A_1}(A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{5} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$

**c.** En utilisant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A_n, B_n\}$, il vient bien, **pour tout entier** $\mathbf{n \geq 1}$ :

$$\mathbf{a_{n+1}} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) = a_n\cdot\frac{2}{3} + b_n\cdot\frac{1}{3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{a_n} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{b_n}.$$

On obtient de la même manière, **pour tout entier** $\mathbf{n \geq 1}$ :

$$\mathbf{b_{n+1}} = P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) = a_n\cdot\frac{1}{3} + b_n\cdot\frac{2}{3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{a_n} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{b_n}$$

**d.** Pour **tout entier $n \geq 1$**, on a, d'après la question précédente :

$$\mathbf{X_{n+1}} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{3}BX_n}$$

**e.** Montrons par récurrence la propriété $P_n$, définie pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$X_n = \frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$$

<u>Initialisation</u> :

$P_1$ est vraie car on a :

$$\frac{1}{3^{1-1}}B^{1-1}X_1 = \frac{1}{3^0}B^0X_1 = I_2X_1 = X_1$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose $P_n$ vraie, pour une valeur de l'entier naturel $n \geq 1$n, c'est-à-dire :

$$X_n = \frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$$

On montre que $P_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = \frac{1}{3^n}B^nX_1$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question précédente :

$$X_{n+1} = \frac{1}{3}BX_n = \frac{1}{3}B\frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1 = \frac{1}{3^n}BB^{n-1}X_1 = \frac{1}{3^n}B^nX_1$$

Ceci assure que $P_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier $n \geq 1$**, on a :

$$\mathbf{X_n = \frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1}$$

**f.** D'après la question précédente et les questions 3.c et 4.a, on a, pour tout entier $n \geq 1$ :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n-1}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 & 3^{n-1}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 3^{n-1}+1 & 3^{n-1}-1 \\ 3^{n-1}-1 & 3^{n-1}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2x3^n}\begin{pmatrix} 2\cdot 3^{n-1}+2+3^{n-1}-1 \\ 2\cdot 3^{n-1}-2+3^{n-1}+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2x3^n}\begin{pmatrix} 3^n+1 \\ 3^n-1 \end{pmatrix}$$

On a, **pour tout entier $n \geq 1$** :

$$\mathbf{a_n = \frac{3^n+1}{2x3^n}} \text{ et } \mathbf{b_n = \frac{3^n-1}{2x3^n}}$$

**5. Simulation informatique.**

**a.** Les lignes 4 et 5 sont complétées de telle sorte que lors des 20 échanges de la partie la variable a corresponde au point marqué par Antoine lors de cet échange (c'est-à-dire 1 ou 0) de la façon suivante :

| | |
|---|---|
| 4. | if a==1 then a=grand(1,1,'bin',1,2/3) |
| 5. | else a=grand(1,1,'bin',1,1/3) |

**b.** Les lignes 2 et 7 du programme sont complétées de telle sorte afin que la variable S calcule la somme des points obtenus par Antoine durant la partie de la façon suivante :

| | |
|---|---|
| 2. | S=0 |
| 7. | S=S+a |

## Exercice 2

**1.a.** La dérivée de g vérifie **pour tout** $\mathbf{x>0}$ l'égalité :

$$\mathbf{g'(x)}=1-\frac{1}{x}=\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x}}$$

**b.** On a :

$$\mathbf{g(1)}=1-\ln(1)=\mathbf{1}$$

**c.** On a :

$$\lim_{x\to 0}\mathbf{g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(x-\ln(x)\right)=\mathbf{+\infty}$$

Car :

$$\lim_{x\to 0}x=0 \text{ et } \lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$$

On a, en factorisant par x :

$$\lim_{x\to+\infty}\mathbf{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\ln(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)=\mathbf{+\infty}$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0 \text{ (par croissance comparée)}$$

**d.** Puisque $x>0$ sur $]0,+\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $x-1$ sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

Compte-tenu des questions b et c, le tableau des variations de g sur $]0,+\infty[$ est le suivant :

| x | 0 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| g' | \|\| | − | 0 | + | |
| g | \|\| +∞ | ↘ | 1 | ↗ | +∞ |

**e.** D'après le tableau des variations de g, g présente en 1 un minimum de valeur 1, donc on a, **pour tout réel x strictement positif** :

$$\mathbf{g(x)>0}$$

**2.a.** On a, **pour tout réel** $\mathbf{x>0}$ :

$$\mathbf{f'(x)}=-\frac{g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}=-\frac{\frac{x-1}{x}}{\left(x-\ln(x)\right)^2}=-\frac{x-1}{x\left(x-\ln(x)\right)^2}=\frac{\mathbf{1-x}}{\mathbf{x\left(x-\ln(x)\right)^2}}$$

**b.** Il résulte de la question 1.c que :

$$\lim_{x\to 0}\mathbf{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)}=\mathbf{0}$$

Car :

$$\lim_{x\to 0}g(x)=+\infty$$

Et :

$$\lim_{x\to+\infty}\mathbf{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}=\mathbf{0}$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, **la courbe représentative de f admet l'axe des abscisses pour asymptote au voisinage de** $\mathbf{+\infty}$.

**c.** Puisque $x\left(x-\ln(x)\right)^2>0$ sur $]0,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1-x$ sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$1-x>0 \Leftrightarrow x<1$$

Le tableau des variations de f sur $]0,+\infty[$ avec les limites obtenues à la question 2.b. ainsi que $f(1)$ est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $\Vert$ $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

**3.a.** Pour tout réel $x>0$, on a :

$$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{x-\ln(x)}=x \Leftrightarrow x-\ln(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x-\ln(x)-\frac{1}{x}=0$$

Donc **l'équation $\mathbf{f(x)=x}$ est équivalente à l'équation $\mathbf{x-\ln(x)-\frac{1}{x}=0}$ sur $\mathbf{]0,+\infty[}$**.

**b.** On a, **pour tout réel $\mathbf{x>0}$** :

$$\mathbf{h'(x)}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\mathbf{\frac{x^2-x+1}{x^2}}$$

Puisque $x^2>0$ sur $]0,+\infty[$, $h'(x)$ est du signe de $x^2-x+1$ sur $]0,+\infty[$ ; le discriminant du polynôme $x^2-x+1$ est :

$$\Delta=1-4=-3<0$$

On a donc, pour tout réel $x>0$ :

$$h'(x)>0$$

Donc **h est strictement croissante sur $\mathbf{]0,+\infty[}$**.

**c.** Compte-tenu des limites données et de la question précédente, le tableau des variations de h est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $h$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**d.** D'après la question 3.a, l'équation $f(x)=x$ est équivalente à l'équation $h(x)=0$ sur $]0,+\infty[$.

h est continue (comme différence de fonctions continues) sur $]0,+\infty[$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ d'après la question 3.b., donc h réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $h(]0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to 0}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ ; puisque 0 appartient à $h(]0,+\infty[)$, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]0,+\infty[$.

Donc **l'équation $\mathbf{f(x)=x}$ admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha}$ dans $\mathbf{]0,+\infty[}$**.

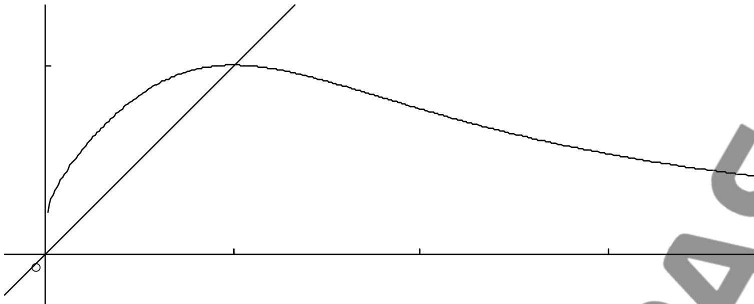
On a :

$$\mathbf{f(1)=1}$$

Par unicité de $\alpha$, il vient :

$$\boldsymbol{\alpha=1}$$

**4.** L'allure de la représentation graphique de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm sont les suivantes :



### Exercice 3

**1.a.** X compte le nombre de succès de l'évènement « une cartouche est défectueuse », de probabilité $p = \frac{2}{100}$, au cours de $n = 100$ tests de cartouches identiques et indépendants, donc **X suit la loi binomiale** $\mathcal{B}\left(\mathbf{n = 100, p = \frac{2}{100}}\right)$.

D'après le cours, il vient :

$$\mathbf{X(\Omega)} = [\![0, n]\!] = [\![\mathbf{0,100}]\!]$$

Et, pour tout entier k de $X(\Omega)$ :

$$\mathbf{p(X=k)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{\mathbf{100}}{\mathbf{k}} \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{100}}\right)^{\mathbf{k}} \left(\frac{\mathbf{98}}{\mathbf{100}}\right)^{\mathbf{100-k}}$$

**b.** D'après les formules du cours, l'espérance et la variance de X sont respectivement :

$$\mathbf{E(X)} = np = 100 \cdot \frac{2}{100} = \mathbf{2} \text{ et } \mathbf{V(X)} = np(1-p) = 2\left(1 - \frac{2}{100}\right) = 2 \cdot \frac{98}{100} = \mathbf{\frac{49}{25}}$$

**c.** Le programme suivant a été complété afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche les valeurs respectives de X et de Y :

```
X=grand(1,1,'bin',100,2/100)
if X==0 then Y=grand(1,1,'uin',1,100)
         else Y=X
end
disp(X),disp(Y)
```

**2.a.** Chaque cartouche ayant la probabilité p d'être défectueuse, $X_i$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ pour tout entier i compris entre 1 et n ; d'après le cours, l'espérance et la variance de $X_i$ sont respectivement :

$$\mathbf{E(X_i) = p} \text{ et } \mathbf{V(X_i) = p(1-p)}$$

**b.** Par définition de $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E(M_n)} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p = \frac{1}{n}(np) = \mathbf{p}$$

Puisque $E(M_n) = p$, $\mathbf{M_n}$ **est un estimateur sans biais de p**.

**c.** Par propriété de la variance et par indépendance des variables $X_i$, il vient :

$$\mathbf{V(M_n)} = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p(1-p) = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \mathbf{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Puisque $M_n$ est un estimateur sans biais de p, le risque quadratique de $M_n$ est :

$$\mathbf{r(M_n)} = V(M_n) = \mathbf{\frac{p(1-p)}{n}}$$

**d.** $\varepsilon$ un réel strictement positif, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à la variable aléatoire $M_n$, donne :

$$P\left(\left|M_n - E(M_n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}$$

Soit encore, d'après les questions 2.b. et 2.c. :

$$P\left(\left|M_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

L'énoncé ayant fait admettre que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, il en résulte que :

$$\mathbf{P\left(\left|M_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}}$$

**e.** Par définition, $[M_n - \varepsilon, M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $1-\alpha$ si $P(M_n - \varepsilon \leq p \leq M_n + \varepsilon) \geq 1 - \alpha$.

On a :

$$P(M_n - \varepsilon \leq p \leq M_n + \varepsilon) = P(-\varepsilon \leq M_n - p \leq \varepsilon) = P\left(\left|M_n - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|M_n - p\right| > \varepsilon\right)$$

D'après la question précédente et puisque $\left(\left|M_n - p\right| > \varepsilon\right) \subset \left(\left|M_n - p\right| \geq \varepsilon\right)$, on a :

$$P\left(\left|M_n - p\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left|M_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Il vient donc :

$$P(M_n - \varepsilon \leq a \leq M_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$, on obtient :

$$P(M_n - \varepsilon \leq a \leq M_n + \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\frac{1}{4n\alpha}} = 1 - \alpha$$

Ainsi, **si** $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}}$**, alors** $\boldsymbol{[M_n - \varepsilon, M_n + \varepsilon]}$ **est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance** $\boldsymbol{1-\alpha}$.

### Exercice 4

**1.a.** Pour tout réel t appartenant à $[0,1]$, on a, en réduisant au même dénominateur :

$$1-\frac{1}{1+t}=\frac{1+t-1}{1+t}=\frac{t}{1+t}$$

Ainsi a-t-on vérifié que, **pour tout réel t appartenant à $[0,1]$** :

$$\mathbf{\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}}$$

**b.** Par définition de $I_n$ et d'après la question précédente, il vient :

$$\mathbf{I_1}=\int_0^1\frac{t}{1+t}dt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=\left[t-\ln(1+t)\right]_0^1=\mathbf{1-\ln(2)}$$

**c.** Par définition de $I_n$ et par linéarité de l'intégrale, il vient, **pour tout entier $n\geq 1$** :

$$\mathbf{I_{n+1}+I_n}=\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}dt+\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt=\int_0^1\frac{t^{n+1}+t^n}{1+t}dt=\int_0^1\frac{t^n(t+1)}{1+t}dt=\int_0^1 t^n\,dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{n+1}}$$

**d.** En donnant à n la valeur 1 dans l'égalité de la question précédente, il vient :

$$I_2+I_1=\frac{1}{2}$$

On a donc, compte-tenu de la question 1.b :

$$\mathbf{I_2}=\frac{1}{2}-I_1=\frac{1}{2}-(1-\ln(2))=\mathbf{\ln(2)-\frac{1}{2}}$$

En donnant à n la valeur 2 dans l'égalité de la question précédente, il vient :

$$I_3+I_2=\frac{1}{3}$$

On a donc, compte-tenu de la valeur de $I_2$ :

$$\mathbf{I_3}=\frac{1}{2}-I_2=\frac{1}{3}-\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\ln(2)=\mathbf{\frac{5}{6}-\ln(2)}$$

**2.** Pour que f soit une densité de probabilité, il faut que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_0^1 f(t)dt+\int_1^{+\infty}0\,dt=\int_0^1 f(t)dt$$

Il vient donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1\Leftrightarrow\int_0^1 f(t)dt=1\Leftrightarrow\int_0^1 k\frac{t}{1+t}dt=1\Leftrightarrow k\int_0^1\frac{t}{1+t}dt=1\Leftrightarrow kI_1=1\Leftrightarrow k=\frac{1}{I_1}$$

Donc, d'après la question 1.b, **la valeur qu'il faut donner à k pour que f puisse être une densité de probabilité est $\mathbf{k=\frac{1}{1-\ln(2)}}$**.

Reste à vérifier que pour cette valeur de k, f est bien une densité de probabilité.

f est continue sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$ comme fonction nulle, et sur $[0,1]$ comme fonction rationnelle de dénominateur non nul ; de plus f, étant continue sur $[0,1]$, admet des limites finies en $0^+$ et $1^-$ ; elle a également des limites finies en $0^-$ et $1^+$ car :

$$\lim_{t\to 0^-}f(t)=\lim_{t\to 0^-}0=0 \text{ et } \lim_{t\to 1^+}f(t)=\lim_{t\to 1^+}0=0$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec un nombre fini (un) de points de discontinuité.

Pour tout réel t appartenant à $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$, on a :

$$f(t)=0\geq 0$$

Pour tout réel t appartenant à $[0,1]$, on a, puisque $k=\frac{1}{1-\ln(2)}$ est un réel positif :

$$f(t)=k\frac{t}{1+t}\geq 0$$

Donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, **pour la valeur** $\mathbf{k=\frac{1}{1-\ln(2)}}$, **f est bien une densité de prob**abilité.

**3.a.** On sait que, pour tout réel x :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

On a donc, **lorsque** $\mathbf{x<0}$ :

$$\mathbf{F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\,dt=0}$$

Et, **lorsque** $\mathbf{x>1}$ :

$$\mathbf{F(x)}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_{0}^{1}f(t)dt+\int_{1}^{x}0\,dt=0+1+0=\mathbf{1}$$

**b.** Pour tout réel $x\in[0,1]$, on a :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_{0}^{x}f(t)dt=\int_{0}^{x}f(t)dt=\int_{0}^{x}k\frac{t}{1+t}dt=k\int_{0}^{x}\frac{t}{1+t}dt$$

Il vient donc, d'après la question 1.a, **pour tout réel** $\mathbf{x\in[0,1]}$ :

$$\mathbf{F(x)}=k\int_{0}^{x}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=k\left[t-\ln(1+t)\right]_{0}^{x}=\mathbf{k(x-\ln(1+x))}$$

**4.a.** Sous réserve d'existence, l'espérance de X est définie par :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$, $\int_{-\infty}^{0}tf(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty}tf(t)dt$ convergent, et on a :

$$\int_{-\infty}^{0}tf(t)dt=\int_{1}^{+\infty}tf(t)dt=0$$

Donc **X admet une espérance** et on a :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=\int_{-\infty}^{0}tf(t)dt+\int_{0}^{1}tf(t)dt+\int_{1}^{+\infty}tf(t)dt=\int_{0}^{1}tf(t)dt$$

On a ensuite, par définition de f :

$$E(X)=\int_{0}^{1}tf(t)dt=\int_{0}^{1}k\frac{t^2}{1+t}dt=k\int_{0}^{1}\frac{t^2}{1+t}dt=kI_2$$

Il vient alors, en utilisant la question 1.d :

$$\mathbf{E(X)}=\frac{1}{1-\ln(2)}\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{\frac{\ln(2)-\frac{1}{2}}{1-\ln(2)}}$$

**b.** Sous réserve d'existence, l'espérance de $X^2$ est définie par :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$, $\int_{-\infty}^{0} t^2 f(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ convergent, et on a :

$$\int_{-\infty}^{0} t^2 f(t)\,dt=\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt=0$$

Donc $X^2$ admet une espérance et on a :

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} t^2 f(t)\,dt+\int_{0}^{1} t^2 f(t)\,dt+\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt=\int_{0}^{1} t^2 f(t)\,dt$$

On a ensuite, par définition de f :

$$E\left(X^2\right)=\int_{0}^{1} t^2 f(t)\,dt=\int_{0}^{1} k\frac{t^3}{1+t}\,dt=k\int_{0}^{1}\frac{t^3}{1+t}\,dt=kI_3$$

Il vient alors, en utilisant la question 1.d :

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{1-\ln(2)}\left(\frac{5}{6}-\ln(2)\right)=\frac{\frac{5}{6}-\ln(2)}{1-\ln(2)}$$

Puisque $X^2$ admet une espérance, X admet une variance, et on a, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V(X)}=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{\mathbf{\frac{5}{6}-\ln(2)}}{\mathbf{1-\ln(2)}}-\left(\frac{\mathbf{\ln(2)-\frac{1}{2}}}{\mathbf{1-\ln(2)}}\right)^2$$