CORRIGÉ

Par Serge Lucas, professeur en CPGE au lycée Les Bruyères, à Sotteville-les-Rouen.

Exercice 1

1. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a, en notant I la matrice identité d'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 03^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et par définition de la multiplication des matrices :

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^n & 0 & 2^n + 3(3^n - 2^n) \\ 0 & 3.3^n & 3^n + 3n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3.3^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2^n + 3\cdot 3^n - 3\cdot 2^n \\ 0 & 3^{n+1} & 3^n + n3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2\cdot 2^n \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$$

2. Application à l'étude de deux suites

a. L'instruction à ajouter en ligne 4 du programme donné pour qu'il affiche la valeur de a_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur, est l'instruction :

ii. a=2*a+3^(i-1)

En effet, la variable a va contenir les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; elle est initialisée à 2 puisque $a_0 = 2$ et on a ensuite, par définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout entier naturel i non nul :

$$a_i = 2a_{i-1} + 3^{i-1}$$

b. On a, pour tout entier naturel n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3^n \\ 3b_n + 3^n \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{X_{n+1} = AX_n}$$

c. Le programme suivant a été recopié et complété afin qu'il affiche la valeur de a_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur :

```
n=input("n?")
A=[2,0,1;0,3,1;0,0,3]
X=[2;0;1]
for i=1:n
    X=A*X
end
disp(X(1))
```

d. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$X_n = A^n X_0$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$A^0 X_0 = IX_0 = X_0$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$X_n = A^n X_0$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = A^{n+1} X_0$$

On a, d'après la question 2.b et l'hypothèse de récurrence :

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{X_n = A^n X_0}$$

e. D'après la question précédente et la question 1, il vient, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x2^n + 3^n - 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}$$

Il en résulte, par identification des coefficients, qu'on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{a_n = 2^n + 3^n \text{ et } b_n = n3^{n-1}}$$

3. Application au calcul des puissances d'une autre matrice

a. Les calculs donnent :

$$\mathbf{PQ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Il en résulte que **P est inversible** et que :

$$\mathbf{P^{-1} = Q}$$

b. Les calculs donnent :

$$\mathrm{PMP^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi a-t-on :

$$\mathbf{PMP^{-1} = A}$$

c. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$M^n = P^{-1}A^nP$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I = M^0$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$M^n = P^{-1}A^nP$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$M^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$M^{n+1} = M^nM = P^{-1}A^nPM$$

On a, d'après la question précédente :

$$PMP^{-1} = A \Leftrightarrow M = P^{-1}AP$$

Il en résulte que :

$$M^{n+1} = P^{-1}A^nPP^{-1}AP = P^{-1}A^nIAP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{M^n = P^{-1}A^nP}$$

D'après les questions 1 et 3.a, il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{M^n} = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & -2\cdot 3^n + 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & -3^n + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x3^n - 2^n & 0 & 2^n - 2x3^n + 2^n \\ n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^n - 3^n + 2^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{2x3^n - 2^n} & \mathbf{0} & \mathbf{2(2^n - 3^n)} \\ \mathbf{-n3^{n-1}} & \mathbf{3^n} & \mathbf{n3^{n-1}} \\ \mathbf{3^n - 2^n} & \mathbf{0} & \mathbf{2^{n+1} - 3^n} \end{pmatrix}$$

4. Application au calcul d'une somme

a. Par définition de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour tout entier naturel k :

$$b_{k+1} = 3b_k + 3^k$$

Ce qui peut s'écrire, pour tout entier naturel k :

$$b_{k+1} = 2b_k + b_k + 3^k$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel k** :

$$\mathbf{2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k}$$

b. $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 3^0 et de raison 3, donc on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{3^k} = 3^0 \cdot \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{\mathbf{3^{n+1} - 1}}{\mathbf{2}}$$

c. Puisque $b_0 = 0$, on obtient par télescopage, **pour tout entier naturel n** :

$$\sum_{k=0}^{n} (\mathbf{b_{k+1} - b_k}) = \cancel{b_1} - b_0 + \cancel{b_2} - \cancel{b_1} + \cancel{b_3} - \cancel{b_2} + \cdots + \cancel{b_n} - \cancel{b_{n-1}} + b_{n+1} - \cancel{b_n} = b_{n+1} - b_0 = \mathbf{b_{n+1}}$$

d. Il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{k3^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad \text{d'après la question 2.e}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}(b_{k+1} - b_k - 3^k) \qquad \text{d'après la question 4.a}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) - \sum_{k=0}^{n} 3^k \right) \qquad \text{par linéarité de la somme}$$

$$= \frac{1}{2}\left(b_{n+1} - \frac{3^{n+1} - 1}{2} \right) \qquad \text{d'après les question 4.c et 4.b}$$

$$= \frac{1}{2}\left((n+1)3^n - \frac{3^{n+1}-1}{2}\right) \quad \text{d'après la question 2.e}$$

$$= \frac{\mathbf{(n+1)3^n}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{3^{n+1}}}{\mathbf{4}}$$

Exercice 2

1. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$$

Car :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et donc } \lim_{x\to-\infty}(1+e^x) = 1$$

On peut en déduire que **la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$**.

2.a. On a, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+e^{-x}}}$$

b. Il en résulte que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ puisque } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

L'interprétation graphique de ce résultat est que **la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$**.

3.a. On a, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Par dérivation d'un quotient, on obtient, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{(1+e^x)^2}}$$

b. Puisque $e^x > 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$, il vient, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

Donc **f est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}$**.
On a :

$$f(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

Le tableau de variation de f est donc le suivant :

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
f'		+	
f	**0** ↗	$\frac{1}{2}$	↗ **1**

c. Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

4. Il a été admis que, pour tout réel x, on a :

$$f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}$$

Puisque $e^x > 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f''(x)$ est du signe de $1-e^x$ sur $\mathbb{R}$; on a :

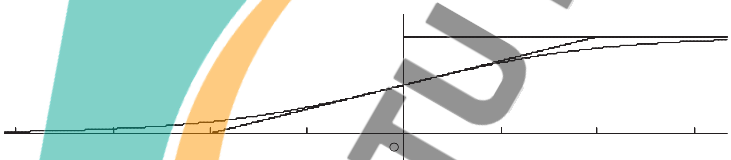
$$1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Le signe de $f''(x)$ est donc donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−

Donc **f est convexe sur $]-\infty,0]$ et concave sur $[0,+\infty[$**.

5. Le tracé $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ est le suivant :



6.a. Compte-tenu de la formule de dérivation $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, il vient, **pour tout réel x** :

$$\mathbf{h'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}}$$

b. On a, pour tout réel A de $]-\infty,0]$:

$$\int_A^0 f(x)\,dx = \int_A^0 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_A^0 h'(x)\,dx = h(0)-h(A) = \ln 2 - \ln(1+e^A)$$

Il vient donc :

$$\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \left(\ln 2 - \ln(1+e^A)\right) = \ln 2$$

Car :

$$\lim_{A\to-\infty}\left(1+e^{A}\right)=1 \text{ et } \lim_{x\to1}\ln(x)=0$$

Ceci prouve que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \mathbf{f(x)dx}$ **est convergente** et que sa valeur est :

$$\int_{-\infty}^{0} \mathbf{f(x)dx=\ln 2}$$

Exercice 3

1. Puisqu'il y a deux boules rouges parmi les quatre boules de l'urne $\mathcal{U}_2$, on a :

$$P_F(R_1)=\frac{1}{2}$$

Puisqu'il y a quatre boules rouges parmi les quatre boules de l'urne $\mathcal{U}_1$, on a :

$$P_{\overline{F}}(R_1)=1$$

En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{F,\overline{F}\}$, la probabilité de tirer une boule rouge à l'issue d'un tirage est :

$$\mathbf{P(R_1)}=P(F)P_F(R_1)+P(\overline{F})P_{\overline{F}}(R_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

2.a. On a :

$$\mathbf{P_F(R_1\cap R_2)}=P_F(R_1)P_{F\cap R_1}(R_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

Et, puisque l'urne $\mathcal{U}_1$ ne contient que des boules rouges :

$$\mathbf{P_{\overline{F}}(R_1\cap R_2)=1}$$

En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{F,\overline{F}\}$, la probabilité que le tirage amène deux boules rouges de suite est :

$$\mathbf{P(R_1\cap R_2)}=P(F)P_F(R_1\cap R_2)+P(\overline{F})P_{\overline{F}}(R_1\cap R_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{7}{12}}$$

b. Ayant remarqué à postériori que les deux boules tirées sont rouges, la probabilité que la pièce ait amené pile est :

$$\mathbf{P_{R_1\cap R_2}(\overline{F})}=\frac{P(\overline{F}\cap R_1\cap R_2)}{P(R_1\cap R_2)}=\frac{P(\overline{F})P_{\overline{F}}(R_1\cap R_2)}{P(R_1\cap R_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot1}{\frac{7}{12}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{7}=\mathbf{\frac{6}{7}}$$

3.a. Les tirages ayant lieu sans remise dans une urne contenant 4 boules, on a :

$$Y(\Omega)\subset[\![1,4]\!]$$

- si on tire une boule blanche, l'urne est l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y=1$
- si on tire une boule rouge, puis une blanche, l'urne est l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y=2$
- si on tire deux boules rouges, puis une blanche, l'urne est l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y=3$
- $Y=4$ est impossible, car si on tire trois boules, soit ce sont trois boules rouges et l'urne est l'urne $\mathcal{U}_1$, soit on tire deux boules rouges puis une blanche dans cet ordre et l'urne est l'urne $\mathcal{U}_2$. Dans les deux cas, l'urne est reconnue après le troisième tirage.

On a donc :

$$\mathbf{Y(\Omega) = [\![1,3]\!]}$$

b. $(Y=1)$ signifie qu'après un tirage, on est en mesure de déterminer avec certitude l'urne dans laquelle on a tiré la boule ; cela signifie qu'on a tiré une boule blanche, donc que l'urne choisie était l'urne $\mathcal{U}_2$, donc que la pièce avait donné « face ».

On a donc :

$$\mathbf{(Y=1) = F \cap B_1}$$

Il en résulte que :

$$\mathbf{P(Y=1)} = P(F \cap B_1) = P(F)P_F(B_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

c. $(Y=2)$ signifie qu'après deux tirages, on est en mesure de déterminer avec certitude l'urne dans laquelle on a tiré les deux boules ; cela signifie qu'on a tiré une boule rouge, puis une boule blanche, donc que l'urne choisie était l'urne $\mathcal{U}_2$, donc que la pièce avait donné « face ».

On a donc :

$$(Y=2) = F \cap R_1 \cap B_2$$

Puis :

$$\mathbf{P(Y=2)} = P(F \cap R_1 \cap B_2) = P(F)P_F(R_1)P_{F\cap R_1}(B_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

d. Puisque $Y(\Omega) = [\![1,3]\!]$ d'après la question 3.a, il vient :

$$\mathbf{P(Y=3)} = 1 - P(Y=1) - P(Y=2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{12-3-2}{12} = \mathbf{\frac{7}{12}}$$

e. Par définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète finie, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbf{E(Y)} &= \sum_{k=1}^{3} kP(Y=k) = P(Y=1) + 2P(Y=2) + 3P(Y=3)\\ &= \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{7}{4} = \frac{1}{3} + 2 = \mathbf{\frac{7}{3}}\end{aligned}$$

Exercice 4

1.a. On a :

$$\mathbf{\int_0^1 f_n(t)\,dt} = \int_0^1 nt^{n-1}\,dt = \left[t^n\right]_0^1 = \mathbf{1}$$

b. f_n est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$ comme fonction nulle, et continue sur $[0,1]$ comme fonction polynôme.

f_n, étant continue sur $[0,1]$, admet des limites finies en 0^+ et 1^- ; elle a également des limites finies en 0^- et 1^+ car :

$$\lim_{t\to 0^-} f_n(t) = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0 \text{ et } \lim_{t\to 1^+} f_n(t) = \lim_{t\to 1^+} 0 = 0$$

Donc f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

f_n est positive sur $\mathbb{R}$ car :

$$\begin{cases} f_n(t) = nt^{n-1} \geq 0 & \text{si } t \in [0,1] \\ f_n(t) = 0 \geq 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque f_n est nulle sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$, $\int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty} f_n(t)dt$ convergent, et on a :

$$\int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt = \int_{1}^{+\infty} f_n(t)dt = 0$$

Il en résulte que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ converge et qu'on a, d'après la question précédente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt + \int_{0}^{1} f_n(t)dt + \int_{1}^{+\infty} f_n(t)dt = 0+1+0 = 1$$

Donc $\mathbf{f_n}$ **est une densité de probabilité**.

2.a. On a, **pour tout réel $x < 0$** :

$$\mathbf{F_n(x)} = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = \mathbf{0}$$

Et **pour tout réel $x > 1$** :

$$\mathbf{F_n(x)} = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} f_n(t)dt + \int_{0}^{x} 0dt = 0+1+0 = \mathbf{1}$$

b. Pour tout réel $x \in [0,1]$, on a :

$$\mathbf{F_n(x)} = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} nt^{n-1}dt = 0 + \left[t^n\right]_0^x = \mathbf{x^n}$$

3. Sous réserve de convergence de l'intégrale, l'espérance de X_n est définie par :

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)dt$$

Puisque f_n est nulle sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$, $\int_{-\infty}^{0} tf_n(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty} tf_n(t)dt$ convergent, et on a :

$$\int_{-\infty}^{0} tf_n(t)dt = \int_{1}^{+\infty} tf_n(t)dt = 0$$

Il en résulte que $\mathbf{X_n}$ **admet une espérance** et qu'on a :

$$\mathbf{E(X_n)} = \int_{-\infty}^{0} tf_n(t)dt + \int_{0}^{1} tf_n(t)dt + \int_{1}^{+\infty} tf_n(t)dt = \int_{0}^{1} nt^n dt = \left[\frac{nt^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{n}{n+1}}$$

4. Un exemple.

a. Z est la variable aléatoire égale à la plus grande valeur entre U_1 et U_2 ; on a donc, pour tout réel x :

$$Z \leq x \Leftrightarrow (U_1 \leq x \text{ et } U_2 \leq x)$$

Ce qui peut s'écrire, avec des événements :

$$[Z \leq x] = [U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x]$$

Et entraîne bien que :

$$\mathbf{P(Z \leq x) = P([U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x])}$$

Par définition de H, il vient donc, **pour tout réel x** :

$$\begin{aligned}\mathbf{H(x)} &= P(Z \leq x) \\ &= P([U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x])\end{aligned}$$

$$= P(U_1 \le x)P(U_2 \le x) \text{ par indépendance de } U_1 \text{ et } U_2$$

$$= (F(x))^2 \text{ car } U_1 \text{ et } U_2 \text{ suivent la même loi de fonction de répartition F}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{x^2} & \mathbf{si\ x \in [0,1]} \\ \mathbf{1} & \mathbf{si\ x > 1} \end{cases} \text{ d'après le rappel de l'expression de F}$$

On constate, d'après les questions 2.a et 2.b, que :

$$H = F_2$$

Donc, puisqu'elles ont même fonction de répartition, les variables aléatoires **Z et X_2 suivent la même loi**.

b. On a, d'après l'expression de H obtenue à la question précédente :

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{Z \ge \frac{1}{3}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{1}{3}\right) = 1 - H\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{8}{9}}$$

Et :

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{\frac{1}{3} \le Z \le \frac{1}{2}}\right) = H\left(\frac{1}{2}\right) - H\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{5}{36}}$$

Il en résulte que :

$$\mathbf{P}_{\left(Z \ge \frac{1}{3}\right)}\left(\mathbf{Z \le \frac{1}{2}}\right) = \frac{P\left(\left[Z \le \frac{1}{2}\right] \cap \left[Z \ge \frac{1}{3}\right]\right)}{P\left(Z \ge \frac{1}{3}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{3} \le Z \le \frac{1}{2}\right)}{P\left(Z \ge \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{8}{9}} = \frac{5}{36} \cdot \frac{9}{8} = \mathbf{\frac{5}{32}}$$

c. Le programme suivant a été recopié et complété afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche la valeur de Z :

```
U1=grand(1,1,'unf',0,1)
U2=grand(1,1,'unf',0,1)
if U1>=U2 then
        Z=U1
                else
        Z=U2
end
disp(Z)
```

5.a. Pour tout réel x, on a, par définition de G_n :

$$\mathbf{G_n(x)} = P(Y_n \le x)$$
$$= P(-\ln(X_n) \le x)$$
$$= P(\ln(X_n) \ge -x)$$
$$= P(X_n \ge e^{-x})$$
$$= 1 - P(X_n < e^{-x})$$
$$= \mathbf{1 - F_n(e^{-x})}$$

b. On a :

$$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow e^{-x} > e^0 = 1$$

Ainsi, **si** $\mathbf{x<0}$ **alors** $\mathbf{e^{-x}>1}$.

D'après les questions 5.a et 2.a, il vient, **lorsque** $\mathbf{x<0}$:

$$\mathbf{G_n}(\mathbf{x})=1-F_n\left(e^{-x}\right)=1-1=\mathbf{0}$$

c. Il résulte de la question précédente que si $x\geq 0$, alors $0<e^{-x}\leq 1$; on a donc, **lorsque** $\mathbf{x\geq 0}$:

$$\mathbf{G_n}(\mathbf{x})=1-F_n\left(e^{-x}\right)=1-\left(e^{-x}\right)^n=\mathbf{1-e^{-nx}}$$

En posant $\lambda=n$, G_n est donc définie par :

$$\begin{cases} G_n(x)=1-e^{-nx}=1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0 \\ G_n(x)=0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Ceci est l'expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda=n$, donc $\mathbf{Y_n}$ **suit la loi exponentielle de paramètre** $\boldsymbol{\lambda=n}$.

d. Y_n suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda=n$, les formules du cours donnent :

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y_n})=\frac{1}{\lambda}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \text{ et } \mathbf{V}(\mathbf{Y_n})=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2}}$$