CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

Exercice 1

1.a. Les calculs donnent :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$A + 6I = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ainsi a-t-on montré que :

$$\mathbf{A^2 = A + 6I}$$

b. En notant 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le résultat de la question précédente peut s'écrire :

$$A^2 - A - 6I = 0$$

Donc **un polynôme annulateur de la matrice A est le polynôme $\mathbf{P(X) = X^2 - X - 6}$**.

c. Les racines de $P(X)$ sont les seules valeurs propres possibles de A ; puisque le discriminant de $P(X)$ est $\Delta = 1 - 4(-6) = 25$, les racines de $P(X)$ sont :

$$X_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

Donc **les seules valeurs propres possibles de A sont $\mathbf{-2}$ et 3**.

2.a. Les calculs donnent :

$$AU = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3U \text{ et } AV = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2V$$

Puisque $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, **U et V sont des vecteurs propres de la matrice A respectivement associés aux valeurs propres 3 et $\mathbf{-2}$**.

b. Les calculs donnent :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } PD = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi a-t-on montré que :

$$\mathbf{AP = PD}$$

Le polynôme $P(X)$ est scindé, ses deux racines sont valeurs propres de A, et la matrice P est obtenue à partir des vecteurs propres U et V de A, donc l'égalité $AP = PD$ assure que **la matrice A est diagonalisable**.

3.a. Rappelons que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et que, dans ce cas, sa matrice inverse est $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Ici, pour la matrice P, on a :

$$ad - bc = 3.1 - 1(-2) = 5$$

Puisque $ad - bc \neq 0$, **P est inversible** et l'application du rappel donne :

$$\mathbf{P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^nP = PD^n$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$A^0P = IP = P \text{ et } PD^0 = PI = P$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^nP = PD^n$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1}P = PD^{n+1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.b :

$$A^{n+1}P = AA^nP = APD^n = PDD^n = PD^{n+1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^nP = PD^n}$$

c. L'égalité de la question précédente peut s'écrire, puisque P est inversible :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Puisque D est une matrice diagonale, on a, pour tout entier naturel n :

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{A^n} = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1} & (-2)^{n+1} \\ 3^n & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1}-(-2)^{n+1} & 2\cdot 3^{n+1}+3\cdot(-2)^{n+1} \\ 3^n-(-2)^n & 2\cdot 3^n+3\cdot(-2)^n \end{pmatrix}}$$

4. En prenant $n=0$, puis $n=1$, la relation de récurrence définissant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne :

$$\mathbf{u_2} = u_1 + 6u_0 + 3 = 1-3+3 = \mathbf{1} \text{ et } \mathbf{u_3} = u_2 + 6u_1 + 3 = 1+6+3 = \mathbf{10}$$

5. L'instruction à ajouter à la ligne 5 pour que le programme calcule et affiche la valeur de u_n, l'entier n non nul étant donné par l'utilisateur, est :

u=a+6*v+3

6.a. On a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{X_{n+1}} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1}+6u_n+3 \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1}+6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{= AX_n + B}$$

b. On a :

$$\mathbf{AL+B} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}+\frac{6}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{= L}$$

c. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$X_n = A^n(X_0 - L) + L$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$A^0(X_0 - L) + L = I(X_0 - L) + L = X_0 - L + L = X_0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$X_n = A^n(X_0 - L) + L$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = A^{n+1}(X_0 - L) + L$$

On a, d'après la question 6.a, l'hypothèse de récurrence et la question 6.b :

$$X_{n+1} = AX_n + B = A\left(A^n(X_0 - L) + L\right) + B = A^{n+1}(X_0 - L) + AL + B = A^{n+1}(X_0 - L) + L$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{X_n = A^n(X_0 - L) + L}$$

d. D'après les questions 6.c et 3.c, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = X_n = A^n(X_0 - L) + L = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2\cdot 3^{n+1} + 3\cdot(-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2\cdot 3^n + 3\cdot(-2)^n \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2\cdot 3^{n+1} + 3\cdot(-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2\cdot 3^n + 3\cdot(-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La deuxième ligne de cette matrice donne u_n ; il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n} = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}\left(3^n - (-2)^n\right) - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{10}\left(3^n - (-2)^n\right) - \frac{1}{2}}$$

7. L'instruction à compléter à la ligne 5 pour que le programme calcule et affiche la valeur de u_n, l'entier n non nul étant donné par l'utilisateur, est :

X=A*X+B

Exercice 2

1.a. On a, puisque $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = e^x + 1 > 0$$

Donc **g est croissante sur** $\mathbb{R}$.

b. On a :

$$\mathbf{g(0)} = e^0 - 1 + 0 = 1 - 1 = \mathbf{0}$$

Puisque g est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $g(0) = 0$, le signe de $g(x)$ est donné par le tableau :

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	**0**	$+$	

2.a. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{x}{e^x}\right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0 \text{ (croissance comparée)}$$

b. On a, comme cette limite vient d'être rappelée :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{x}{e^x}-x-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$$

Donc **la droite D d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.**

c. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{x}{e^x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)+1\right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right) = -\infty$$

3.a. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x) = 1-\frac{e^x-xe^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{\left(e^x\right)^2-e^x+xe^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x\left(e^x-1+x\right)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x-1+x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

b. Puisque $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$; d'après la question 1.b, le tableau des variations de f, avec les limites calculées à la question 2, est le suivant :

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
f'		$-$	**0**	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	**1**	$\nearrow$	$+\infty$

4. On a :

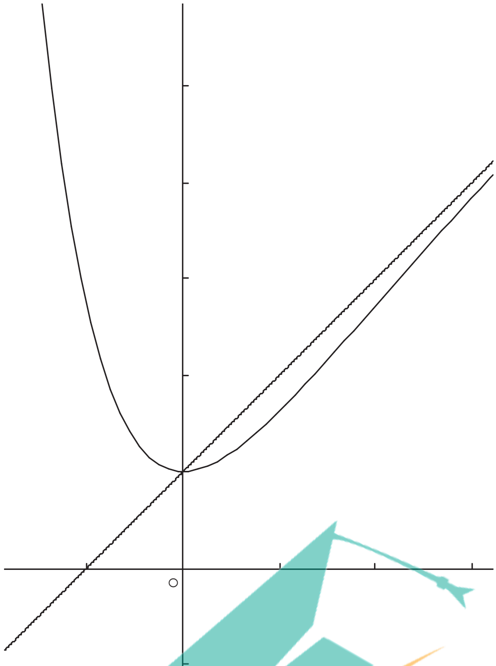
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f''(x) = \frac{g'(x)e^x-e^xg(x)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{g'(x)-g(x)}{e^x} = \frac{e^x+1-\left(e^x-1+x\right)}{e^x} = \frac{2-x}{e^x}$$

Puisque $e^x > 0$, $f''(x)$ est du signe de $2-x$ sur $\mathbb{R}$; le signe de $f''(x)$ est donc donné par le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

Donc **f est convexe sur $]-\infty, 2]$ et concave sur $[2, +\infty[$.**

5. L'allure de $\mathcal{C}$ et D, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm, est la suivante :



Exercice 3

1.a. Le joueur marque un point au deuxième tirage si la boule obtenue au deuxième tirage est de couleur différente de celle obtenue au premier tirage, c'est-à-dire s'il a obtenu une boule blanche au premier tirage et une boule rouge au deuxième tirage, ou le contraire ; on a donc bien :

$$\mathbf{(X_2 = 1) = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)}$$

Par incompatibilité des événements $B_1 \cap R_2$ et $R_1 \cap B_2$, il vient :

$$P(X_2 = 1) = P((B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2)$$

Les tirages s'effectuant avec remise, les événements B_1 et R_2 d'une part, R_1 et B_2 d'autre part, sont indépendants, donc on a :

$$\mathbf{P(X_2 = 1)} = P(B_1)P(R_2) + P(R_1)P(B_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

b. Puisque X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_2 = 1) = \frac{4}{9}$, on a :

$$\mathbf{E(X_2)} = p = \mathbf{\frac{4}{9}} \text{ et } \mathbf{V(X_2)} = p(1-p) = \frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9} = \mathbf{\frac{20}{81}}$$

2.a. L'urne et la règle du jeu étant analogues lors des deux premiers tirages et lors des deux suivants, **X_3 suit la même loi que X_2**.

b. G étant la variable aléatoire égale au nombre total de points marqués lors des trois tirages, on a :

$$\mathbf{G = X_2 + X_3}$$

Par linéarité de l'espérance, et puisque X_3 suit la même loi que X_2, il vient, d'après la question 1.b :

$$\mathbf{E(G)} = E(X_2+X_3) = E(X_2)+E(X_3) = 2E(X_2) = 2\cdot\frac{4}{9} = \mathbf{\frac{8}{9}}$$

3.a. L'événement $(X_2=1)\cap(X_3=1)$ est réalisé s'il y a deux changements de couleurs consécutifs, c'est-à-dire si l'on tire dans cet ordre une rouge, une blanche, une rouge, ou une blanche, une rouge, une blanche ; on a donc :

$$\mathbf{(X_2=1)\cap(X_3=1) = (R_1\cap B_2\cap R_3)\cup(B_1\cap R_2\cap B_3)}$$

Par incompatibilité, puis indépendance, il vient bien :

$$\begin{aligned}\mathbf{P\big((X_2=1)\cap(X_3=1)\big)} &= P\big((R_1\cap B_2\cap R_3)\cup(B_1\cap R_2\cap B_3)\big)\\ &= P(R_1\cap B_2\cap R_3)+P(B_1\cap R_2\cap B_3)\\ &= P(R_1)P(B_2)P(R_3)+P(B_1)P(R_2)P(B_3)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{27}+\frac{4}{27} = \frac{6}{27} = \mathbf{\frac{2}{9}}\end{aligned}$$

b. On trouve de même :

$$\begin{aligned}P\big((X_2=0)\cap(X_3=0)\big) &= P\big((R_1\cap R_2\cap R_3)\cup(B_1\cap B_2\cap B_3)\big)\\ &= P(R_1)P(R_2)P(R_3)+P(B_1)P(B_2)P(B_3)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{27}+\frac{8}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\big((X_2=0)\cap(X_3=1)\big) &= P\big((R_1\cap R_2\cap B_3)\cup(B_1\cap B_2\cap R_3)\big)\\ &= P(R_1)P(R_2)P(B_3)+P(B_1)P(B_2)P(R_3)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{27}+\frac{4}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\big((X_2=1)\cap(X_3=0)\big) &= P\big((R_1\cap B_2\cap B_3)\cup(B_1\cap R_2\cap R_3)\big)\\ &= P(R_1)P(B_2)P(B_3)+P(B_1)P(R_2)P(R_3)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}+\frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

Le tableau donnant la loi conjointe du couple (X_2, X_3) est donc le suivant :

X_2 \ X_3	**0**	**1**
0	$\mathbf{\frac{3}{9}}$	$\mathbf{\frac{2}{9}}$
1	$\mathbf{\frac{2}{9}}$	$\mathbf{\frac{2}{9}}$

On a :

$$\operatorname{cov}(X_2,X_3) = E(X_2X_3) - E(X_2)E(X_3)$$

On a déjà vu que :

$$E(X_2)=E(X_3)=\frac{4}{9}$$

On a :

$$E(X_2X_3)=\sum_{\substack{x\in X_2(\Omega)\\ y\in X_3(\Omega)}} xyP\big((X_2=x)\cap(X_3=y)\big)=0\cdot0\cdot\frac{3}{9}+0\cdot1\cdot\frac{2}{9}+1\cdot0\cdot\frac{2}{9}+1\cdot1\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$$

Il vient bien :

$$\mathbf{cov}(\mathbf{X_2},\mathbf{X_3})=\frac{2}{9}-\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{18-16}{81}=\mathbf{\frac{2}{81}}$$

4. D'après la question 2.b, on a :

$$V(G)=V(X_2+X_3)=V(X_2)+V(X_3)+2\,\mathrm{cov}(X_2,X_3)$$

D'après les questions 1.b et 2.a, on a :

$$V(X_2)=V(X_3)=\frac{20}{81}$$

Il résulte de la question précédente que :

$$\mathbf{V(G)}=\frac{20}{81}+\frac{20}{81}+2\cdot\frac{2}{81}=\mathbf{\frac{44}{81}}$$

5.a. L'instruction X=grand(1,n,'bin'1,1/3) simule n lois binomiales indépendantes de paramètres 1 et $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire n lois de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{3}$; chaque tirage dans l'urne suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$, puisque la probabilité d'obtenir une boule blanche est $\frac{1}{3}$, et les tirages sont indépendants, donc **cette instruction permet de simuler n tirages dans l'urne**.

b. Pour que le programme simule n tirages successifs dans l'urne et qu'il affiche le nombre de points marqués par le joueur, il faut ajouter à la ligne 6 l'instruction :

G=G+1

En effet, au départ, le gain est $G=0$; pour chacun des tirages, du deuxième au n-ième, lorsque l'instruction X(i)<>X(i-1) est vérifiée, les boules obtenues au i-ème et au $(i+1)$-ième tirage sont de couleurs différentes et donc le gain augmente d'un point.

Exercice 4

1. On a :

$$\forall x\in[a,+\infty[\quad \int_a^x \frac{1}{t^2}\,dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_a^x=-\frac{1}{x}+\frac{1}{a}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x\frac{1}{t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}$$

Ceci assure que **l'intégrale I converge** et que :

$$\mathbf{I=\frac{1}{a}}$$

On a de même :

$$\forall x \in [a,+\infty[\quad \int_a^x \frac{1}{t^3}dt = \int_a^x t^{-3}\,dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_a^x = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_a^x = -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2a^2}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x \frac{1}{t^3}dt = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2a^2}\right) = \frac{1}{2a^2}$$

Ceci assure que **l'intégrale J converge** et que :

$$\mathbf{J = \frac{1}{2a^2}}$$

On a enfin de même :

$$\forall x \in [a,+\infty[\quad \int_a^x \frac{1}{t^4}dt = \int_a^x t^{-4}\,dt = \left[\frac{t^{-3}}{-3}\right]_a^x = \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_a^x = -\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3a^3}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x \frac{1}{t^4}dt = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3a^3}\right) = \frac{1}{3a^3}$$

Ceci assure que **l'intégrale K converge** et que :

$$\mathbf{K = \frac{1}{3a^3}}$$

2. f est continue sur $]-\infty,a[$ comme fonction nulle, et sur $[a,+\infty[$ comme fonction rationnelle de dénominateur non nul, puisque a est un réel strictement positif ; de plus f a des limites finies à gauche et à droite en a, puisque :

$$\lim_{t\to a^-} f(t) = \lim_{t\to a^-} 0 = 0 \text{ et } \lim_{t\to a^+} f(t) = \lim_{t\to a^+}\frac{3a^3}{t^4} = \frac{3a^3}{a^4} = \frac{3}{a}$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, avec un nombre fini (un) de points de discontinuité.

Pour tout réel t appartenant à $]-\infty,a[$, on a :

$$f(t) = 0 \geq 0$$

Pour tout réel t appartenant à $[a,+\infty[$, on a, puisque a est un réel strictement positif :

$$f(t) = \frac{3a^3}{t^4} > 0$$

Donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Puisque f est nulle sur $]-\infty,a[$, $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt = \int_{-\infty}^a 0dt = 0$$

D'après la question 1, et par linéarité de l'intégrale, $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{+\infty}\frac{3a^3}{t^4}dt = 3a^3\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^4}dt = 3a^3K = 3a^3\cdot\frac{1}{3a^3} = 1$$

Il en résulte que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt = 0+1 = 1$$

Donc **f est bien une densité de probabilité**.

3. Sous réserve de convergence, l'espérance de X est, par définition :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty,a[$, $\int_{-\infty}^{a} tf(t)\,dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{a} tf(t)\,dt=\int_{-\infty}^{a} 0\,dt=0$$

D'après la question 1, et par linéarité de l'intégrale, $\int_{a}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge et vaut :

$$\int_{a}^{+\infty} tf(t)\,dt=\int_{a}^{+\infty}\frac{3a^3}{t^3}\,dt=3a^3\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{t^3}\,dt=3a^3J=3a^3\cdot\frac{1}{2a^2}=\frac{3a}{2}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge, ce qui prouve que **X admet une espérance** et on a, grâce à la relation de Chasles :

$$\mathbf{E(X)}=\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt=\int_{-\infty}^{a} tf(t)\,dt+\int_{a}^{+\infty} tf(t)\,dt=0+\frac{3a}{2}=\mathbf{\frac{3a}{2}}$$

De même, sous réserve de convergence, l'espérance de X^2 est, par définition :

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,dt$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty,a[$, $\int_{-\infty}^{a} t^2f(t)\,dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{a} t^2f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{a} 0\,dt=0$$

D'après la question 1, et par linéarité de l'intégrale, $\int_{a}^{+\infty} t^2f(t)\,dt$ converge et vaut :

$$\int_{a}^{+\infty} t^2f(t)\,dt=\int_{a}^{+\infty}\frac{3a^3}{t^2}\,dt=3a^3\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt=3a^3I=3a^3\cdot\frac{1}{a}=3a^2$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,dt$ converge, ce qui prouve que X^2 admet une espérance et on a, grâce à la relation de Chasles :

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{a} t^2f(t)\,dt+\int_{a}^{+\infty} t^2f(t)\,dt=0+3a^2=3a^2$$

Puisque X^2 admet une espérance, **X admet une variance**, et on a, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V(X)}=E(X^2)-(E(X))^2=3a^2-\left(\frac{3a}{2}\right)^2=3a^2-\frac{9a^2}{4}=\frac{12a^2-9a^2}{4}=\mathbf{\frac{3a^2}{4}}$$

4.a. On sait que, pour tout réel x :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Il vient donc, **lorsque $x<a$** :

$$\mathbf{F(x)}=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=\mathbf{0}$$

b. En utilisant la question 1, on obtient, **lorsque $x\geq a$** :

$$\mathbf{F(x)}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt+\int_{a}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{a} 0\,dt+\int_{a}^{x}\frac{3a^3}{t^4}\,dt=3a^3\int_{a}^{x}\frac{1}{t^4}\,dt$$

$$=3a^3\left(-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3a^3}\right)=-\frac{a^3}{x^3}+1=\mathbf{1-\left(\frac{a}{x}\right)^3}$$

c. On a :

$$P(2a \le X \le 4a) = F(4a) - F(2a)$$

Puisque, a étant strictement positif, $2a \ge a$ et $4a \ge a$, il vient :

$$\mathbf{P(2a \le X \le 4a)} = 1 - \left(\frac{a}{4a}\right)^3 - \left(1 - \left(\frac{a}{2a}\right)^3\right) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{64} + \frac{1}{8} = \frac{-1+8}{64} = \mathbf{\frac{7}{64}}$$

Et, de même :

$$\mathbf{P(X \ge 2a)} = 1 - P(X < 2a) = 1 - F(2a) = 1 - \left(1 - \left(\frac{a}{2a}\right)^3\right) = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

Il résulte de ces deux calculs que :

$$\mathbf{P_{(X \ge 2a)}(X \le 4a)} = \frac{P((X \le 4a) \cap (X \ge 2a))}{P(X \ge 2a)} = \frac{P(2a \le X \le 4a)}{P(X \ge 2a)} = \frac{\frac{7}{64}}{\frac{1}{8}} = \frac{7}{64} \cdot 8 = \mathbf{\frac{7}{8}}$$

5.a. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(M_n) = E\left(\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi que X, il vient, d'après la question 3 :

$$\mathbf{E(M_n)} = \frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} E(X) = \frac{2}{3n} \cdot nE(X) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{2} = \mathbf{a}$$

Par propriété de la variance, et puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on a :

$$V(M_n) = V\left(\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{4}{9n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{4}{9n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi que X, il vient, d'après la question 3 :

$$\mathbf{V(M_n)} = \frac{4}{9n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X) = \frac{4}{9n^2} \cdot nV(X) = \frac{4}{9n} \cdot \frac{3a^2}{4} = \mathbf{\frac{a^2}{3n}}$$

b. Puisque $E(M_n) = a$ d'après la question précédente, **M_n est un estimateur sans biais de a**.

Puisque M_n est un estimateur sans biais de a, son risque quadratique est, d'après la question précédente :

$$\mathbf{r(M_n)} = V(M_n) = \mathbf{\frac{a^2}{3n}}$$

c. ε un réel strictement positif, l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, appliquée à la variable aléatoire M_n, donne :

$$P(|M_n - E(M_n)| > \varepsilon) \le \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}$$

Compte-tenu du calcul de la variance de M_n à la question 5, on a bien :

$$\mathbf{P(|M_n - a| > \varepsilon) \le \frac{a^2}{3n\varepsilon^2}}$$

d. Par définition, $\left[M_n - \varepsilon, M_n + \varepsilon\right]$ est un intervalle de confiance de a au niveau de confiance $1-\alpha$ si $P\left(M_n - \varepsilon \leq a \leq M_n + \varepsilon\right) \geq 1-\alpha$.

On a :

$$P\left(M_n - \varepsilon \leq a \leq M_n + \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon \leq M_n - a \leq \varepsilon\right) = P\left(\left|M_n - a\right| \leq \varepsilon\right) = 1 - P\left(\left|M_n - a\right| > \varepsilon\right)$$

Il vient donc, d'après la question précédente et compte-tenu de la valeur de ε :

$$P\left(M_n - \varepsilon \leq a \leq M_n + \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{a^2}{3n\varepsilon^2} = 1 - \frac{a^2}{3n\left(\frac{a}{\sqrt{3\alpha n}}\right)^2} = 1 - \frac{a^2}{3n \cdot \frac{a^2}{3\alpha n}} = 1-\alpha$$

Ainsi, **pour α réel de $\left]0,1\right[$ et $\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{3\alpha n}}$, $\left[M_n - \varepsilon, M_n + \varepsilon\right]$ est un intervalle de confiance de a au niveau de confiance $1-\alpha$**.

e. On a, par définition de M_n :

$$M_{100} = \frac{2}{3 \cdot 100}\sum_{i=1}^{100} X_i = \frac{2}{3 \cdot 100} \cdot 603 = \frac{2 \cdot 201}{100} = 4,02$$

Le fabriquant peut donc estimer que a vaut 4.