CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

Exercice 1

1. Les calculs donnent :

$$P^2 = PP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\mathbf{P^3} = P^2P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

L'égalité $P^2P = I$ prouve que **P est inversible** et que son inverse est la matrice :

$$\mathbf{P^{-1} = P^2}$$

2. Les calculs donnent :

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\mathbf{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L}$$

3.a. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$P^{-1}A^nP = L^n$$

Initialisation :
P_0 est vraie car on a :

$$P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I = L^0$$

Hérédité :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$P^{-1}A^nP = L^n$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$P^{-1}A^{n+1}P = L^{n+1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question précédente :

$$P^{-1}A^{n+1}P = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^nPP^{-1}AP = L^nL = L^{n+1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{P^{-1}A^nP = L^n}$$

b. Les calculs donnent :

$$J = L - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis :

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 376 13/10/2017 11:36

$$\mathbf{J^2} = JJ = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Puis, en notant 0 la matrice nulle d'ordre 3 :

$$\mathbf{J^3} = J^2J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

c. Il résulte de la définition de J que :

$$L = J + I$$

Puisque J et I commutent, la formule du binôme de Newton donne, pour tout entier naturel n :

$$L^n = (J+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k$$

Il résulte de la question précédente que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 3 :

$$J^k = J^{k-3}J^3 = J^{k-3}0 = 0$$

Il en résulte que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$L^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2$$

On a :

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n \text{ et } \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2}$$

d. En remplaçant I, J et J^2 par leurs expression matricielles dans l'égalité de la question précédente, il vient, **pour tout entier n supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{L^n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2n} & \mathbf{2n(n-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Lorsque $n = 0$ ou $n = 1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = L^0 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L = L^1$$

Ainsi **le résultat reste-t-il vrai lorsque $\mathbf{n = 0}$ et lorsque $\mathbf{n = 1}$**.

e. Il résulte de l'égalité de la question 3.a que, pour tout entier naturel n, on a :

$$A^n = PL^nP^{-1}$$

Il résulte de la question précédente que, pour tout entier naturel n :

$$PL^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix}$$

Puis que, **pour tout entier naturel n** :

$$A^n = PL^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2n(n-1)} & \mathbf{1} & \mathbf{2n} \\ \mathbf{2n} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

4.a. L'égalité $u_{n+1} = u_n$, pour tout entier naturel n non nul , assure que la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n\geq 1}}$ **est une suite constante**.
On a donc, **pour tout entier naturel n non nul** :

$$\mathbf{u_n} = u_1 = \mathbf{1}$$

b. Par définition de X_n, grâce aux relations définissant v_{n+1} et w_{n+1}, et d'après la question précédente, il vient, **pour tout entier naturel n non nul** :

$$\mathbf{X_{n+1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2u_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2 + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \mathbf{AX_n}$$

c. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$X_n = A^{n-1}X_1$$

<u>Initialisation</u> :
P_1 est vraie car on a :

$$A^{1-1}X_1 = A^0X_1 = IX_1 = X_1$$

<u>Hérédité</u> :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n non nul, c'est-à-dire :

$$X_n = A^{n-1}X_1$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = A^nX_1$$

On a, d'après la question 4.b et l'hypothèse de récurrence :

$$X_{n+1} = AX_n = AA^{n-1}X_1 = A^nX_1$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n non nul**, on a :

$$\mathbf{X_n = A^{n-1}X_1}$$

d. D'après les questions 4.c et 3.e, il vient, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = X_n = A^{n-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n-2)+4(n-1) \\ 2(n-1)+2 \end{pmatrix}$$

Ainsi a-t-on, pour tout **entier naturel n non nul** :

$$\mathbf{v_n} = 2(n-1)(n-2)+4(n-1) = 2(n-1)(n-2+2) = \mathbf{2n(n-1)}$$

Et :

$$\mathbf{w_n} = 2(n-1)+2 = 2n-2+2 = \mathbf{2n}$$

5. a. Afin que soit mémorisée dans le variable A la matrice A, la ligne 1 doit être complétée comme suit :

A=[1 0 0;0 1 2;2 0 1]

b. Pour mémoriser les termes successifs de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de v_2 à v_{10}, il faut ajouter en ligne 10 l'instruction C :

v(i)=X(2)

En effet, lorsque pour une valeur de i comprise entre 2 et 10 a été effectuée dans la boucle l'instruction X=A*X, v(i) est le terme de la deuxième ligne dans la matrice colonne X.

c. De même, une instruction pour la ligne 11 qui permette de mémoriser les premiers termes de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est :

v(i)=X(3)

Exercice 2

1.a. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^x-1) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

b. On a, **pour tout réel x de $[0,+\infty[$** :

$$g'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

Puisque $1+x>0$ et $e^x>0$ sur $[0,+\infty[$, il vient, pour tout réel x de $[0,+\infty[$:

$$g'(x)>0$$

Donc le tableau des variations de g est le suivant :

x	**0**	$+\infty$
g'	+	
g	**−1** ↗	$+\infty$

c. g est continue sur $[0,+\infty[$ (comme produit et différence de fonctions continues sur $[0,+\infty[$) et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ (d'après la question précédente), donc g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[) = \left[g(0), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [-1,+\infty[$.

Puisque 0 appartient à $[-1,+\infty[$, **l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$**.

On a :

$$g(0) = -1 \leq g(\alpha) = 0 \leq g(1) = e-1$$

Puisque g est croissante sur $[0,+\infty[$, il vient :

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Ainsi α **appartient à $[0,1]$**.

d. Puisque g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et que $g(\alpha)=0$, le signe de $g(x)$ est donné par le tableau :

x	**0**		α		$+\infty$
g(x)		−	**0**	+	

2.a. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \mathbf{f(x)} = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x - \ln(x)\right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to 0^+} e^x = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

On a :

$$\lim_{x\to +\infty} \mathbf{f(x)} = \lim_{x\to +\infty}\left(e^x - \ln(x)\right) = \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$$

Car, par croissance comparée :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

b. On a, **pour tout réel x de** $[0,+\infty[$:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

Puisque $x > 0$ sur $]0,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$; il résulte de la question 1.d que le tableau des variations de f sur $]0,+\infty[$ est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
f'	‖	−	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

c. On a :

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha = 1 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

Donc **le réel** α **vérifie** $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$.

Il en résulte que :

$$f(\alpha) = e^\alpha - \ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} + \ln(e^\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

3.a. On sait, d'après la question 2.b, que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

Par dérivation, il en résulte que, **pour tout réel x de** $]0,+\infty[$:

$$f''(x) = e^x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^x + \frac{1}{x^2}$$

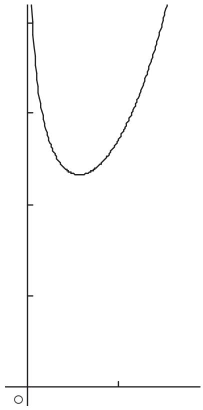
b. Puisque $e^x > 0$ et $\frac{1}{x^2} > 0$ sur $]0,+\infty[$, on a, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$$

Donc **f est convexe sur** $]0,+\infty[$.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 380 13/10/2017 11:36

4. La représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm est la suivante :



Exercice 3

1. Puisqu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A et que si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau A alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au niveau B avec la probabilité $\frac{2}{3}$, il vient :

$$\mathbf{a_1} = P(A_1) = \mathbf{\frac{1}{3}},\ \mathbf{b_1} = P(B_1) = \mathbf{\frac{2}{3}} \text{ et } \mathbf{c_1} = P(C_1) = \mathbf{0}$$

2. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A_n, B_n, C_n\}$, il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a_{n+1}} &= P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\
&= \frac{1}{3}a_n + 0b_n + 0c_n = \mathbf{\frac{1}{3}a_n} \\
\mathbf{b_{n+1}} &= P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\
&= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + 0c_n = \mathbf{\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n} \\
\mathbf{c_{n+1}} &= P(C_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\
&= 0a_n + \frac{2}{3}b_n + 1c_n = \mathbf{\frac{2}{3}b_n + c_n}
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 381 13/10/2017 11:36

Ceci prouve que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$, et il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{a_n}=a_0q^n=1\left(\frac{1}{3}\right)^n=\mathbf{\frac{1}{3^n}}$$

4.a. On a, par définition de v_n et d'après les questions 2 et 3, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=3^{n+1}b_{n+1}=3^{n+1}\left(\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n\right)=2\cdot3^na_n+3^nb_n=2\cdot3^n\frac{1}{3^n}+3^nb_n=2+v_n$$

Ceci prouve que **la suite $(\mathbf{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2**.

b. Puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=2$, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{v_n}=v_0+nr=3^0b_0+2n=3^00+2n=\mathbf{2n}$$

Par définition de v_n, il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{b_n}=\frac{v_n}{3^n}=\mathbf{\frac{2n}{3^n}}$$

5. $\{A_n,B_n,C_n\}$ étant un système complet d'événements, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{a_n+b_n+c_n=1}$$

Il en résulte, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{c_n}=1-a_n-b_n=\mathbf{1-\frac{1}{3^n}-\frac{2n}{3^n}}$$

Il vient donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{c_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{3^n}-\frac{2n}{3^n}\right)=\mathbf{1}$$

En effet, puisque $-1<\frac{1}{3}<1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\ln(n)}}{e^{n\ln(3)}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln(n)-n\ln(3)}=\lim_{n\to+\infty}e^{n\left(\frac{\ln(n)}{n}-\ln(3)\right)}=0$$

Car :

$$\lim_{n\to+\infty}n=+\infty,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0\ \text{et}\ \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

Cette limite signifie qu'on est presque certain d'arriver au sommet de la cage en un nombre fini d'étapes.

6.a. L'enfant ne pouvant atteindre le sommet qu'après deux instants, on a :

$$\mathbf{X(\Omega)=\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$$

b. L'enfant ne peut atteindre le sommet C à l'instant n que s'il était au sommet B à l'instant $n-1$ et au sommet C à l'instant n, donc, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2**, on a :

$$(\mathbf{X=n})=\mathbf{B_{n-1}\cap C_n}$$

c. Il résulte de la question précédente et de la question 4.b que, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2**, on a :

$$\mathbf{P(X=n)}=P(B_{n-1}\cap C_n)=P(B_{n-1})P_{B_{n-1}}(C_n)=\frac{2(n-1)}{3^{n-1}}\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{4(n-1)}{3^n}}$$

7.a. X_1 est le temps d'attente de l'événement « quitter le niveau A », de probabilité $p=\frac{2}{3}$, au cours de tentatives identiques et indépendantes, donc **X_1 suit la loi géométrique de paramètre $p=\frac{2}{3}$**.

D'après le cours, il vient :

$$\mathbf{X_1(\Omega)=\mathbb{N}^*}$$

Et, pour tout entier k de $X_1(\Omega)$:

$$\mathbf{p(X_1=k)}=p(1-p)^{k-1}=\mathbf{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$$

On a enfin :

$$\mathbf{E(X_1)}=\frac{1}{p}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

b. X_2 est encore la variable aléatoire égale à l'instant où pour la première fois l'enfant quitte le niveau B pour arriver sur le niveau C, et comme la probabilité de passer du niveau B au niveau C est la même que celle de passer du niveau A au niveau B, **X_2 suit la même loi que X_1**.

c. On a, par définition de X, X_1 et X_2 :

$$\mathbf{X=X_1+X_2}$$

X_1 et X_2 admettant une espérance, X admet une espérance et on a, par linéarité :

$$\mathbf{E(X)}=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\mathbf{3}$$

Exercice 4

1.a. On a, pour tout réel A supérieur ou égal à 1 :

$$\mathbf{I(A)}=\int_1^A\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}dt=\int_1^A\alpha t^{-\alpha-1}dt=\left[\alpha\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_1^A=\left[-\frac{1}{t^\alpha}\right]_1^A=-\frac{1}{A^\alpha}-(-1)=\mathbf{1-\frac{1}{A^\alpha}}$$

b. f est continue sur $]-\infty,1[$ comme fonction nulle et sur $[1,+\infty[$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas ; de plus, f admet des limites finies à gauche et à droite en 1, puisque :

$$\lim_{t\to1^-}f(t)=\lim_{t\to1^-}0=0\ \text{ et }\ \lim_{t\to1^+}f(t)=\lim_{t\to1^+}\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}=\alpha$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel t appartenant à $]-\infty,1[$, on a :

$$f(t)=0\geq0$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 383 13/10/2017 11:36

Pour tout réel t appartenant à $[1,+\infty[$, on a, puisque α est un réel strictement supérieur à 1:

$$f(t)=\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}>0$$

Donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

$\int_{-\infty}^{1} f(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{1} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1} 0dt=0$$

D'après la question 1.a, on a, puisque α est un réel strictement positif :

$$\lim_{A\to+\infty} I(A)=\lim_{A\to+\infty}\left(1-\frac{1}{A^{\alpha}}\right)=1$$

Donc $\int_{1}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_{1}^{+\infty} f(t)dt=\int_{1}^{+\infty}\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}dt=\lim_{A\to+\infty} I(A)=1$$

Il en résulte que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{+\infty} f(t)dt=0+1=1$$

Donc **f est bien une densité de probabilité**.

2.a. On a, **pour tout réel A supérieur ou égal à 1** :

$$\mathbf{J(A)}=\int_{1}^{A}\frac{\alpha}{t^{\alpha}}dt=\int_{1}^{A}\alpha t^{-\alpha}dt=\left[\alpha\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{1}^{A}=\frac{\alpha}{-\alpha+1}\left(A^{-\alpha+1}-1\right)=\boldsymbol{\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{A^{\alpha-1}}\right)}$$

b. Sous réserve de convergence, l'espérance de X est, par définition :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

$\int_{-\infty}^{1} tf(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{1} tf(t)dt=\int_{-\infty}^{1} 0dt=0$$

D'après la question 2.a, on a :

$$\lim_{A\to+\infty} J(A)=\lim_{A\to+\infty}\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{A^{\alpha-1}}\right)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Car, puisque α est un réel strictement supérieur à 1 :

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A^{\alpha-1}}=0$$

Donc $\int_{1}^{+\infty} tf(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_{1}^{+\infty} tf(t)dt=\int_{1}^{+\infty}\frac{\alpha}{t^{\alpha}}dt=\lim_{A\to+\infty} J(A)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge, ce qui prouve que **X admet une espérance** et on a :

$$\mathbf{E(X)}=\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt=\int_{-\infty}^{1} tf(t)dt+\int_{1}^{+\infty} tf(t)dt=0+\frac{\alpha}{\alpha-1}=\boldsymbol{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

3. Par définition de la fonction de répartition F de X, on a, pour tout réel x :

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 384 13/10/2017 11:36

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

On a donc, **pour tout réel $x<1$** :

$$\mathbf{F(x)}=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=\mathbf{0}$$

Et, d'après la question 1.a, **pour tout réel $x\geq 1$** :

$$\mathbf{F(x)}=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{1} 0\,dt+\int_{1}^{x}\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}dt=0+I(x)=\mathbf{1-\frac{1}{x^{\alpha}}}$$

4.a. La probabilité que la bougie reste allumée en continu plus de deux heures est :

$$\mathbf{P(X>2)}=1-P(X\leq 2)=1-F(2)=1-\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

La probabilité que la bougie reste allumée entre deux et trois heures est :

$$\mathbf{P(2\leq X\leq 3)}=F(3)-F(2)=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)-\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\mathbf{\frac{5}{36}}$$

b. La probabilité que la bougie reste allumée encore une heure, après avoir remarqué qu'elle est encore allumée au bout de deux heures, est :

$$\mathbf{P_{(X\geq 2)}(X\geq 3)}=\frac{P((X\geq 2)\cap(X\geq 3))}{P(X\geq 2)}=\frac{P(X\geq 3)}{P(X\geq 2)}=\frac{1-F(3)}{P(X\geq 2)}=\frac{1-\left(1-\frac{1}{3^2}\right)}{\frac{1}{4}}=\mathbf{\frac{4}{9}}$$

5.a. On a, **pour tout réel x** :

$$\mathbf{G(x)}=P(Y\leq x)=P(\ln(X)\leq x)=P(X\leq e^x)=\mathbf{F(e^x)}$$

b. Si $x\geq 0$, alors $e^x\geq 1$, donc, d'après la question précédente et la question 3, il vient :

$$\mathbf{G(x)}=F(e^x)=1-\frac{1}{(e^x)^{\alpha}}=1-\frac{1}{e^{\alpha x}}=\mathbf{1-e^{-\alpha x}}$$

Si $x<0$, alors $e^x<1$, donc, d'après la question précédente et la question 3, il vient :

$$\mathbf{G(x)}=F(e^x)=\mathbf{0}$$

c. G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre α, donc **Y suit la loi exponentielle de paramètre α**.
D'après le cours, l'espérance et la variance de Y sont :

$$\mathbf{E(Y)=\frac{1}{\alpha}}\text{ et }\mathbf{V(Y)=\frac{1}{\alpha^2}}$$

6.a. Par linéarité de l'espérance et d'après la question 5.c, il vient :

$$\mathbf{E(Z_n)}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln(X_i))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{\alpha}=\mathbf{\frac{1}{\alpha}}$$

Puisque $E(Z_n)=\frac{1}{\alpha}$, **Z_n est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\alpha}$**.

b. D'après la question 5.c, et par propriétés de la variance, les variables $\ln(X_i)$ étant indépendantes, il vient :

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 385 13/10/2017 11:36

$$\mathbf{V}(\mathbf{Z_n}) = \mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(\ln(X_i)) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\frac{1}{\alpha^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}}$$

Puisque Z_n est un estimateur sans biais, le risque quadratique de Z_n est :

$$\mathbf{r}(\mathbf{Z_n}) = \mathrm{V}(Z_n) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{2}}}$$

7. L'instruction mean(log(X)) donne la moyenne des valeurs $X(1), X(2), \ldots, X(100)$, c'est-à-dire Z_{100} ; d'après la question 6.a, on peut estimer que $\frac{1}{\alpha} \simeq 0,33$, et donc que $\boldsymbol{\alpha \simeq 3}$.

D'après la question 2.b, la durée de vie moyenne d'une bougie est $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ et on a :

$$E(X) \simeq \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$$

Ainsi **la durée de vie moyenne d'une bougie est d'une heure et demie**.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 386 13/10/2017 11:36