CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis à Amiens.

Exercice 1

1.a. Montrons que P est inversible et déterminons P^{-1}, en utilisant la méthode de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad\qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux termes diagonaux 1 et -3 de la matrice triangulaire ci-dessus étant non nuls, **P est une matrice inversible** ; la fin de la méthode de Gauss donne :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice P est donc la matrice :

$$\mathbf{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

b. Les calculs donnent :

$$AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\mathbf{P^{-1}AP} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

2.a. Par multiplication de l'égalité $P^{-1}AP = D$ à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient, puisque $PP^{-1} = P^{-1}P = I$:

$$\mathbf{A = PDP^{-1}}$$

b. Montrons alors par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.a :

$$A^{n+1}=A^nA=PD^nP^{-1}PDP^{-1}=PD^nIDP^{-1}=PD^nDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^n=PD^nP^{-1}}$$

c. D étant une matrice diagonale, on a, pour tout entier naturel n :

$$\mathbf{D^n}=\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{n}}\end{pmatrix}$$

d. Il résulte des questions 2.b et 2.c que, pour tout entier naturel n, on a :

$$PD^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 1 & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$$

Puis, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{A^n}=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix}\mathbf{2}+\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{n}} & \mathbf{1}-\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{n}}\\ \mathbf{2}+\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{n-1}} & \mathbf{1}-\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{n-1}}\end{pmatrix}$$

3. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A_n, B_n, C_n\}$, il vient :

$$a_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

D'après le protocole de déplacement de la mouche, on a :

$$P_{A_n}(A_{n+1})=P_{C_n}(A_{n+1})=0 \text{ et } P_{B_n}(A_{n+1})=\frac{1}{4}$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{a_{n+1}=\frac{1}{4}b_n}$$

On obtient de même, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{b_{n+1}}=P(B_{n+1})=P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1})$$

$$=a_n\cdot 1+b_n\cdot\frac{1}{2}+c_n\cdot 1=\mathbf{a_n+\frac{1}{2}b_n+c_n}$$

Et :

$$\mathbf{c_{n+1}}=P(C_{n+1})=P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1})$$

$$=a_n\cdot 0+b_n\cdot\frac{1}{4}+c_n\cdot 0=\mathbf{\frac{1}{4}b_n}$$

4. D'après la question 3, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{b_{n+2}}=a_{n+1}+\frac{1}{2}b_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{2}b_{n+1}+\frac{1}{4}b_n=\mathbf{\frac{1}{2}b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n}$$

5.a. A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B, donc :

$$a_0 = c_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1$$

Il en résulte que :

$$\mathbf{U_0} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Par définition de U_n, et vu le résultat de la question 4, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{U_{n+1}} = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} \mathbf{= AU_n}$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$U_n = A^n U_0$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$A^0 U_0 = IU_0 = U_0$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$U_n = A^n U_0$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$U_{n+1} = A^{n+1} U_0$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 5.a :

$$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{U_n = A^n U_0}$$

c. D'après les questions 5.b et 2.d, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = U_n = A^n U_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

En calculant la deuxième ligne de cette matrice, on a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{b_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \mathbf{= \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

d. On a, pour tout entier naturel n *non nul* :

$$a_n = c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Pour $n = 0$, la formule reste vraie, car on a :

$$\frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{0-1}\right) = \frac{1}{12}(2-2) = 0 = a_0 = c_0$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$a_n = c_n = \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Exercice 2

1.a. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty \text{ et, par croissance comparée, } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

On a :

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\left(x+1+\frac{\ln(x)}{x}\right) = -\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to0}(x+1) = 1 \text{ et } \lim_{x\to0}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x} = -\infty \text{ car } \lim_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to0^+} x = 0^+$$

b. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{\ln(x)}{x}-x-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Donc **la droite D d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$**.

c. On a vu à la question 1.b que pour tout réel strictement positif x :

$$f(x)-(x+1) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Puisque x est strictement positif sur $]0,+\infty[$, $f(x)-(x+1)$ est du signe de $\ln(x)$; on a :

$$\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Donc **C est au-dessus de D sur $[1,+\infty[$ et en dessous de D sur $]0,1]$**.

2.a. On a, pour tout réel strictement positif x :

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{2}x-1\right)\left(\sqrt{2}x+1\right)}{x}$$

On en déduit, puisque $\sqrt{2}x+1$ et x sont strictement positifs sur $]0,+\infty[$, que $g'(x)$ est du signe de $\sqrt{2}x-1$ sur $]0,+\infty[$; on a :

$$\sqrt{2}x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc **g est décroissante sur $\left]0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$**.

b. On a :

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}+1+\ln\left(\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln(2)$$

D'après les variations de g vues à la question 2.a, g admet un minimum en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de valeur $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; puisque $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est strictement positif, **$g(x)$ est strictement positif sur $\left]0,+\infty\right[$**.

c. On a, **pour tout réel x strictement positif** :

$$\mathbf{f'(x)} = 1 + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{1-\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln(x)}{x^2} = \mathbf{\frac{g(x)}{x^2}}$$

d. On déduit de la question 2.c, puisque x^2 est strictement positif sur $\left]0,+\infty\right[$, que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\left]0,+\infty\right[$, donc strictement positif d'après la question 2.b, donc f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

Le tableau des variations de f est le suivant :

x	**0**		**$+\infty$**
f'	‖	**+**	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3. L'allure de C et D dans un repère orthonormé d'unité 2 cm est la suivante :

4.a. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n \geq n+1$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$u_0 = 1 \geq 0+1$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$u_n \geq n+1$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} \geq n+2$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et puisque f est croissante sur $]0,+\infty[$:

$$f(u_n) \geq f(n+1)$$

Or :

$$f(n+1) = n+2+\frac{\ln(n+1)}{n+1} \geq n+2 \text{ car } \frac{\ln(n+1)}{n+1} \geq 0 \text{ puisque } n+1 \geq 1$$

Donc

$$u_{n+1} \geq n+2$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{u_n \geq n+1}$$

b. On a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n + 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} - u_n = 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} \geq 0 \text{ car } u_n \geq n+1 \geq 1$$

Donc **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante**.

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$$

L'inégalité de la question 4.a et un théorème de comparaison permettent de conclure que :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Exercice 3

Partie I

1. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{R, \overline{R}\}$, il vient :

$$P(B) = P(R)P_R(B) + P(\overline{R})P_{\overline{R}}(B) = P(R)P_R(B) + (1-P(R))P_{\overline{R}}(B)$$

Chaque matin, Coralie se lève en retard avec la probabilité $\frac{1}{3}$, donc :

$$P(R) = \frac{1}{3}$$

Lorsqu'elle se lève en retard elle est obligée de prendre le bus pour se rendre au lycée, donc :

$$P_R(B)=1$$

Lorsqu'elle est à l'heure, elle choisit avec trois chances sur cinq de prendre le bus, donc :

$$P_{\overline{R}}(B)=\frac{3}{5}$$

Il vient donc :

$$\mathbf{P(B)}=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5+6}{15}=\mathbf{\frac{11}{15}}$$

2. On remarque qu'un matin donné Coralie prend le bus. La probabilité qu'elle se soit levée à l'heure est, d'après la formule de Bayes :

$$\mathbf{P_B\left(\overline{R}\right)}=\frac{P\left(\overline{R}\right)P_{\overline{R}}(B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{11}{15}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{11}=\mathbf{\frac{6}{11}}$$

3.a. X est le nombre de succès de l'événement « Coralie prend le bus », de probabilité $p=\frac{11}{15}$, au cours de $n=180$ tentatives identiques et indépendantes, donc **X suit la loi binomiale** $\mathcal{B}\left(\mathbf{n=180,p=\frac{11}{15}}\right)$.

On a :

$$\mathbf{X(\Omega)}=[\![0,n]\!]=\mathbf{[\![0,180]\!]}$$

Et, **pour tout entier naturel k de** $[\![\mathbf{0,180}]\!]$:

$$\mathbf{P(X=k)}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{\mathbf{180}}{\mathbf{k}}\left(\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{15}}\right)^{k}\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}}\right)^{180-k}$$

b. L'espérance et la variance de X sont :

$$\mathbf{E(X)}=np=180\cdot\frac{11}{15}=12\cdot 11=\mathbf{132}\quad\text{et}\quad\mathbf{V(X)}=np(1-p)=132\cdot\frac{4}{15}=44\cdot\frac{4}{5}=\mathbf{\frac{176}{5}}$$

c. Coralie peut espérer aller au lycée à pied en moyenne $\mathbf{180-E(X)=48}$ matins dans l'année.

Partie II

1. Par définition de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E(N)}=\sum_{k=1}^{3}kP(N=k)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{3}{8}=\frac{4+2+9}{8}=\mathbf{\frac{15}{8}}$$

2. Puisqu'il y a au plus trois jours de grève, on a :

$$\mathbf{Y(\Omega)=[\![0,3]\!]}$$

3.a. Puisque $P_{(N=1)}(Y=0)=P\left(\overline{R}\right)=1-P(R)$, on a :

$$\mathbf{P_{(N=1)}(Y=0)=\frac{2}{3}}$$

Puisque $P_{(N=1)}(Y=1)=P(R)$, on a :

$$\mathbf{P_{(N=1)}(Y=1)=\frac{1}{3}}$$

b. On déduit de la loi de N et de la question II.3.a que :

$$\mathbf{P((N=1)\cap(Y=0))}=P(N=1)P_{(N=1)}(Y=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

Et que :

$$P((\mathbf{N=1})\cap(\mathbf{Y=1}))=P(N=1)P_{(N=1)}(Y=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

Puisque $Y\leq N$, on a :

$$\mathbf{P((N=1)\cap(Y=2))=P((N=1)\cap(Y=3))=0}$$

4.a. La loi de Y est une des lois marginales du tableau de la loi conjointe du couple (N,Y), obtenue en additionnant les probabilités colonne par colonne ; elle est donnée par les quatre probabilités suivantes :

$$\mathbf{P(Y=0)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{6+1+2}{18}=\frac{9}{18}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{P(Y=1)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{6}=\frac{3+1+3}{18}=\mathbf{\frac{7}{18}}$$

$$\mathbf{P(Y=2)}=\frac{1}{72}+\frac{1}{12}=\frac{1+6}{72}=\mathbf{\frac{7}{72}}$$

$$\mathbf{P(Y=3)=\frac{1}{72}}$$

Par définition de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E(Y)}=\sum_{k=0}^{3}kP(Y=k)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{7}{18}+2\cdot\frac{7}{72}+3\cdot\frac{1}{72}=\frac{28+14+3}{72}=\frac{45}{72}=\mathbf{\frac{5}{8}}$$

b. La probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève est :

$$\mathbf{P(Y=0)=\frac{1}{2}}$$

c. D'après la loi conjointe du couple (N,Y), on a :

$$P((N=1)\cap(Y=2))=0$$

D'après la loi de N et la question II.4.a, on a :

$$P(N=1)=\frac{1}{2}\text{ et }P(Y=2)=\frac{7}{72}$$

Il en résulte que :

$$P((N=1)\cap(Y=2))\neq P(N=1)P(Y=2)$$

Donc **les variables aléatoires Y et N ne sont pas indépendantes**.

d. On a :

$$E(YN)=\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=0}^{3}ijP((N=i)\cap(Y=j))\right)$$

Soit, en ne tenant compte que des termes non nuls de cette somme :

$$E(YN)=1\cdot1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot2\cdot\frac{1}{72}+3\cdot1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot3\cdot\frac{1}{72}$$