CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

Exercice 1

1. Les calculs donnent successivement :

$$A = N - 4I = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = N - 12I = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+6+9 & 6-12+6 & 3+2-5 \\ -15+6+9 & 6-12+6 & 3+2-5 \\ -45+18+27 & 18-36+18 & 9+6-15 \end{pmatrix} = 0$$

$$BA = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+6+9 & -10+4+6 & -5+2+3 \\ 9-18+9 & 6-12+6 & 3-6+3 \\ 27+18-45 & 18+12-30 & 9+6-15 \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi a-t-on :

$$\mathbf{AB = BA = 0}$$

On a les équivalences :

$$BA = 0 \Leftrightarrow (N - 12I)A = 0 \Leftrightarrow NA - 12A = 0 \Leftrightarrow NA = 12A$$

$$AB = 0 \Leftrightarrow (N - 4I)B = 0 \Leftrightarrow NB - 4B = 0 \Leftrightarrow NB = 4B$$

Ainsi a-t-on :

$$\mathbf{NA = 12A \text{ et } NB = 4B}$$

2.a. Montrons alors par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$N^n = a_n A + b_n B$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$a_0 A + b_0 B = \frac{1}{8}A - \frac{1}{8}B = \frac{1}{8}(N - 4I) - \frac{1}{8}(N - 12I) = \frac{1}{\cancel{8}}\cancel{N} - \frac{1}{2}I - \frac{1}{\cancel{8}}\cancel{N} + \frac{3}{2}I = I = N^0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$N^n = a_n A + b_n B$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$N^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}B$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence, la question 1 et la définition des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$N^{n+1} = NN^n = N(a_n A + b_n B) = a_n NA + b_n NB = 12a_n A + 4b_n B = a_{n+1}A + b_{n+1}B$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{N^n = a_n A + b_n B}$$

b. Les égalités $a_{n+1}=12a_n$ et $b_{n+1}=2b_n$, valables pour tout entier naturel n, assurent que **les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques** de raisons respectives $q_a=12$ et $q_b=4$.

Il en résulte qu'on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{a_n}=a_0q_a^n=\mathbf{\frac{1}{8}\cdot 12^n} \text{ et } \mathbf{b_n}=b_0q_b^n=\mathbf{-\frac{1}{8}\cdot 4^n}$$

c. Par définition de M, et d'après les questions 2.a et 2.b, on a, pour tout entier naturel n :

$$M^n=\frac{1}{20^n}N^n=\frac{1}{20^n}(a_nA+b_nB)=\frac{1}{20^n}\left(\frac{1}{8}\cdot 12^nA-\frac{1}{8}\cdot 4^nB\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{12}{20}\right)^nA-\frac{1}{8}\left(\frac{4}{20}\right)^nB$$

Ainsi a-t-on, après simplification, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{M^n=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^nA-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^nB}$$

3.a. Pour **tout entier naturel n non nul**, on a :

$$\mathbf{X_{n+1}}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\d_{n+1}\\t_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{20}u_n+\frac{1}{10}d_n+\frac{1}{20}t_n\\\frac{3}{20}u_n+\frac{3}{10}d_n+\frac{1}{20}t_n\\\frac{9}{20}u_n+\frac{3}{10}d_n+\frac{7}{20}t_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{20}&\frac{1}{10}&\frac{1}{20}\\\frac{3}{20}&\frac{3}{10}&\frac{1}{20}\\\frac{9}{20}&\frac{3}{10}&\frac{7}{20}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\d_n\\t_n\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}7&2&1\\3&6&1\\9&6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\d_n\\t_n\end{pmatrix}=\mathbf{MX_n}$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$X_n=M^{n-1}X_1$$

<u>Initialisation</u> :

P_1 est vraie car on a :

$$M^{1-1}X_1=M^0X_1=IX_1=X_1$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n non nul, c'est-à-dire :

$$X_n=M^{n-1}X_1$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1}=M^nX_1$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 3.a :

$$X_{n+1}=MX_n=MM^{n-1}X_1=M^nX_1$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n non nul**, on a :

$$\mathbf{X_n=M^{n-1}X_1}$$

c. On a, par définition de X_n, et puisque la poule pond un œuf la première semaine :

$$X_1=\begin{pmatrix}u_1\\d_1\\t_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

D'après les questions 3.a et 2.c, on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$X_n = M^{n-1}X_1 = \left(\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} A - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} B\right)X_1$$

Donc, pour tout entier naturel n non nul, X_n est la première colonne de la matrice $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} A - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} B$, soit :

$$X_n = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}3\\3\\9\end{pmatrix} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}-5\\3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\ \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\\ \frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n non nul** :

$$\mathbf{u_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}, \ \mathbf{d_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}} \text{ et } \mathbf{t_n = \frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$$

d. $1-(u_n+d_n+t_n)$ est la probabilité de l'événement contraire de l'événement « la poule est vivante et pond au moins un œuf la n-ième semaine ». C'est encore la probabilité que la poule ait été mangée avant la n-ième semaine ou qu'elle n'ait pas pondu d'œuf la n-ième semaine. Autrement dit, **$1-(u_n+d_n+t_n)$ est la probabilité que la poule ait été mangée avant le début de la $(n+1)$-ème semaine**.

e. D'après la question 3.c, on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) + 3\left(\frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{8}+\frac{6}{8}+\frac{27}{8}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{5}{8}-\frac{6}{8}-\frac{27}{8}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{36}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{28}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Ainsi a-t-on, après simplification, **pour tout entier naturel n non nul** :

$$\mathbf{u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}$$

Sous réserve de convergence, on a, d'après ce qui précède et par linéarité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + 2d_n + 3t_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) = \frac{9}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Il vient donc, après changement d'indice :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + 2d_n + 3t_n) = \frac{9}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} - \frac{7}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$$

Les séries $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ sont des séries géométriques de raisons respectives $x_1 = \frac{3}{5}$ et $x_2 = \frac{1}{5}$; puisque $-1 < x_1 < 1$ et $-1 < x_2 < 1$, ces deux séries sont convergentes et leur somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{1}{1-x_1}=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{1}{1-x_2}=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$$

Il en résulte que la série $\sum_{n\geq 0}(\mathbf{u_n+2d_n+3t_n})$ **converge** et que sa somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\mathbf{u_n+2d_n+3t_n})=\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{45}{4}-\frac{35}{8}=\mathbf{\frac{55}{8}}$$

Ce nombre est **le nombre d'œuf que l'on peut espérer obtenir avant de manger la poule**.

Exercice 2

1.a. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\mathbf{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2+e^{-x}\right)=+\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2+e^{-x}-x+2\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$$

Donc **la courbe C admet pour asymptote au voisinage de $+\infty$ la droite D d'équation $\mathbf{y=x-2}$**.

b. On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\left(x-2+e^{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(1-\frac{e^{-x}}{-x}\right)-2\right)=+\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to-\infty}x=-\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{-x}=+\infty$$

Puisque :

$$\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty \text{ (limite remarquable du cours)}$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{e^{-x}}{-x}\right)-2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{e^{-x}}{-x}-\frac{2}{x}\right)=-\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{-x}=+\infty \text{ (vu ci-dessus) et } \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

Donc **la courbe C admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées**.

2. On a, **pour tout réel x** :

$$\mathbf{f'(x)=1-e^{-x}}$$

Il vient :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

D'où le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		−	0	+	
f	$+\infty$	↘	−1	↗	$+\infty$

3. f est continue (comme somme et composée de fonctions qui le sont) et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$, donc f réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur $f(]-\infty,0]) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[= [-1,+\infty[$; puisque 0 appartient à $f(]-\infty,0])$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique β dans $]-\infty,0]$.

De même, f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[) = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-1,+\infty[$; puisque 0 appartient à $f([0,+\infty[)$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $[0,+\infty[$.

Donc **C coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif**.

On a :

$$f(1) = -1 + e^{-1} = -1 + \frac{1}{e} < 0 \ (\text{car } e > 1) \text{ et } f(2) = e^{-2} > 0$$

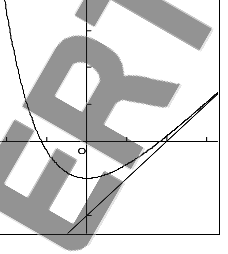
Puisque f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, il vient :

$$f(1) < f(\alpha) = 0 < f(2) \Rightarrow 1 < \alpha < 2$$

Il a bien été montré que :

$$\boldsymbol{\alpha \in]1,2[}$$

4. L'allure de C et D est donnée sur la figure ci-dessous :



5.a. On a les équivalences :

$$g(x) = x \Leftrightarrow 2 - e^{-x} = x \Leftrightarrow x - 2 + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Ainsi :

$$\mathbf{g(x) = x \text{ si et seulement si } f(x) = 0}$$

b. On a, **pour tout réel x** :

$$g'(x) = e^{-x}$$

Donc **g est (strictement) croissante sur** $\mathbb{R}$, puisque, pour tout réel x, on a :

$$g'(x) > 0$$

Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$1 \leq u_n \leq 2$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$1 \leq u_0 = 1 \leq 2$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$1 \leq u_n \leq 2$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et puisque g est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow g(1) \leq u_{n+1} = g(u_n) \leq g(2)$$

Or :

$$g(1) = 2 - e^{-1} = 2 - \frac{1}{e} \geq 1 \ (\text{car } e \geq 1) \text{ et } g(2) = 2 - e^{-2} \leq 2$$

Donc

$$1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{1 \leq u_n \leq 2}$$

c. On a vu à la question 5.b que, pour tout réel x :

$$g'(x) > 0$$

Par ailleurs, on a :

$$x \geq 1 \Rightarrow -x \leq -1 \Rightarrow e^{-x} \leq e^{-1}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout réel x appartenant à** $[1,2]$:

$$\mathbf{0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}}$$

d. g est dérivable sur $[1,2]$, et d'après la question 5.c, on a, pour tout réel x de $[1,2]$:

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$$

De plus, d'après les questions 5.b et 3, u_n et α appartiennent à $[1,2]$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout entier naturel n :

$$|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$$

Puisque $u_{n+1} = g(u_n)$ et que $g(\alpha) = \alpha$ (conséquence de la question 5.a et de l'égalité $f(\alpha) = 0$), il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|}$$

e. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$$

<u>Initialisation</u> :
P_0 est vraie car, d'après la question 3, α appartient à $[1,2]$, donc on a :

$$|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 1 = \frac{1}{e^0}$$

<u>Hérédité</u> :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e^{n+1}}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 5.d :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e^{n+1}}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\boldsymbol{|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}}$$

Puisque $-1 < \frac{1}{e} < 1$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$$

La limite et l'inégalité précédentes, ainsi que le théorème des gendarmes, assurent que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$$

<u>Exercice 3</u>

1.a. X_1 est le nombre de réalisations de l'événement « une personne choisit le premier étage », de probabilité $p = \frac{1}{3}$, au cours de $n = 5$ choix identiques et indépendants, donc $\mathbf{X_1}$ **suit la loi binomiale** $\boldsymbol{\mathcal{B}\left(n = 5, p = \frac{1}{3}\right)}$.

On a :

$$\mathbf{X_1(\Omega) = [\![0,5]\!]}$$

Et, **pour tout entier naturel k de** $\boldsymbol{[\![0,5]\!]}$:

$$\mathbf{P(X_1 = k)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{5-k} = \boldsymbol{\binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}}$$

b. L'espérance et la variance de X_1 sont :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X_1}) = np = \mathbf{\frac{5}{3}} \text{ et } \mathbf{V}(\mathbf{X_1}) = np(1-p) = \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{10}{9}}$$

c. Les trois étages jouant un rôle analogue, $\mathbf{X_2}$ **et** $\mathbf{X_3}$ **suivent la même loi que** $\mathbf{X_1}$.

2.a. $X_1 + X_2 + X_3$ est le nombre de personnes montant dans l'ascenseur, donc :

$$\mathbf{X_1 + X_2 + X_3 = 5}$$

b. Il résulte des questions 2.a et 1.a que :

$$\mathbf{P}((\mathbf{X_1 = 0}) \cap (\mathbf{X_2 = 0})) = P(X_3 = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \mathbf{\frac{1}{243}}$$

c. L'ascenseur ne s'arrête qu'une fois s'il s'arrête uniquement au premier étage, ou au deuxième, ou au troisième : la probabilité P cherchée est donc, par incompatibilité des événements $(X_1 = 5)$, $(X_2 = 5)$ et $(X_3 = 5)$:

$$P = P((X_1 = 5) \cup (X_2 = 5) \cup (X_3 = 5)) = P(X_1 = 5) + P(X_2 = 5) + P(X_3 = 5)$$

D'après les questions 1.c et 2.b, il vient :

$$\mathbf{P} = 3P(X_3 = 5) = 3\cdot\frac{1}{243} = \mathbf{\frac{1}{81}}$$

3. Puisqu'il y a trois étages et que l'ascenseur ne revient pas en arrière, on a :

$$\mathbf{Z(\Omega) = [\![1,3]\!]}$$

4.a. $Y_1 = 0$ si l'ascenseur ne s'arrête pas au premier étage, c'est-à-dire si aucune personne ne s'arrête au premier étage ; on a donc :

$$\mathbf{P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0)}$$

b. D'après les questions 4.a et 1.a, il vient :

$$\mathbf{P(Y_1 = 1)} = 1 - P(Y_1 = 0) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 1 - \frac{32}{243} = \mathbf{\frac{211}{243}}$$

Y_1 étant la variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p = P(Y_1 = 1) = \frac{211}{243}$, on a :

$$\mathbf{E(Y_1)} = p = \mathbf{\frac{211}{243}}$$

c. On a :

$$\mathbf{Z = Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Par linéarité de l'espérance, et puisque Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1, on a :

$$\mathbf{E(Z)} = E(Y_1 + Y_2 + Y_3) = E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) = 3E(Y_1) = 3\cdot\frac{211}{243} = \mathbf{\frac{211}{81}}$$

Exercice 4

1.a. f_n est continue sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$ comme fonction constante nulle, et f_n est continue sur $[0,1]$ comme produit et différence de fonctions continues.

Etant continue sur $[0,1]$, f_n est continue à droite en 0 ; f_n est continue à gauche en 0, car :

$$\lim_{t\to 0^-} f_n(t) = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0 = f_n(0)$$

Donc f_n est continue en 0.

Etant continue sur $[0,1]$, f_n est continue à gauche en 1 ; f_n est continue à droite en 1, car :

$$\lim_{t\to 1^+} f_n(t) = \lim_{t\to 1^+} 0 = 0 = f_n(1)$$

Donc f_n est continue en 1.

Ce qui précède assure que **f_n est continue sur** $\mathbb{R}$.

b. On a :

$$\int_0^1 \mathbf{t^n(1-t)dt} = \int_0^1 (t^n - t^{n+1})dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(n+1)(n+2)}}$$

c. D'après la question 1.a, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

f_n est nulle, donc positive ou nulle sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$; si t appartient à $[0,1]$, $t^n \geq 0$ et $1-t \geq 0$, donc f_n est positive ou nulle sur $[0,1]$

Donc f_n est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

On a, grâce à la relation de Chasles, par linéarité et d'après la question 1.b :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt + \int_0^1 f_n(t)dt + \int_1^{+\infty} f_n(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^1 (n+1)(n+2)t^n(1-t)dt + \int_1^{+\infty} 0dt \\ &= 0 + (n+1)(n+2)\int_0^1 t^n(1-t)dt + 0 \\ &= (n+1)(n+2)\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1\end{aligned}$$

Donc **f_n est une densité de probabilité**.

2.a. Par définition de la fonction de répartition F_1 de X, on a, pour tout réel x :

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt$$

On a donc, **pour tout réel x de $]-\infty,0[$** :

$$\mathbf{F_1(x)} = \int_{-\infty}^{x} 0dt = \mathbf{0}$$

Et, d'après le calcul de la question 1.c, **pour tout réel x de $]1,+\infty[$** :

$$\mathbf{F_1(x)} = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt = \int_{-\infty}^{1} f_1(t)dt + \int_1^{+\infty} 0dt = 1 + 0 = \mathbf{1}$$

Enfin, **pour tout réel x de $[0,1]$**, on a :

$$\mathbf{F_1(x)} = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x 6t(1-t)dt = 6\int_0^x (t-t^2)dt = 6\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^x = \mathbf{3x^2 - 2x^3}$$

b. La probabilité que le train ait moins d'une demi-heure de retard est :

$$\mathbf{P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)} = F_1\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

c. La probabilité que le retard soit compris entre un quart d'heure et une demi-heure est :

$$\mathbf{P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)} = F_1\left(\frac{1}{2}\right) - F_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \left(3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{32}\right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{32} = \mathbf{\frac{11}{32}}$$

d. Le haut-parleur annonce que l'on sait que le retard sera inférieur à une demi-heure. La probabilité qu'il soit supérieur à un quart d'heure est :

$$\mathbf{P}_{\left(X\le\frac{1}{2}\right)}\left(\mathbf{X}\ge\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)=\frac{P\left(\left(X\ge\frac{1}{4}\right)\cap\left(X\le\frac{1}{2}\right)\right)}{P\left(X\le\frac{1}{2}\right)}=\frac{P\left(\frac{1}{4}\le X\le\frac{1}{2}\right)}{P\left(X\le\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{11}{32}}{\frac{1}{2}}=\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{16}}$$

3.a. On a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$tf_1(t)=6t^2(1-t)=\frac{1}{2}\cdot12t^2(1-t)=\frac{1}{2}f_2(t)$$

L'égalité est vraie sur $\mathbb{R}\setminus[0,1]$ puisque $f_1(t)=f_2(t)=0$.
Il a donc été montré que, **pour tout réel t** :

$$\mathbf{tf_1(t)=\frac{1}{2}f_2(t)}$$

Par définition de l'espérance, et sous réserve d'existence, on a :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf_1(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}f_2(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)dt$$

Puisque f_2 est une densité de probabilité d'après la question 1.c, $\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)$ converge et vaut 1, donc $E(X)$ existe et on a :

$$\mathbf{E(X)=\frac{1}{2}}$$

b. On a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$t^2f_1(t)=6t^3(1-t)=\frac{6}{20}20t^3(1-t)=\frac{3}{10}f_3(t)$$

L'égalité est vraie sur $\mathbb{R}\setminus[0,1]$ puisque $f_1(t)=f_3(t)=0$.
Il a donc été montré que, **pour tout réel t** :

$$\mathbf{t^2f_1(t)=\frac{3}{10}f_3(t)}$$

Par définition de l'espérance, et sous réserve d'existence, on a :

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2f_1(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{10}f_3(t)dt=\frac{3}{10}\int_{-\infty}^{+\infty}f_3(t)dt$$

Puisque f_3 est une densité de probabilité d'après la question 1.c, $\int_{-\infty}^{+\infty}f_3(t)$ converge et vaut 1, donc $E(X^2)$ existe et on a :

$$\mathbf{E(X^2)=\frac{3}{10}}$$

La formule de Koenig-Huygens donne alors :

$$\mathbf{V(X)}=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{20}}$$

4.a. En posant $\lambda=\frac{3}{4}$, une densité g de Y se présente sous la forme :

$$\begin{cases} g(x)=0 & \text{si } x<0 \\ g(x)=\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît que **Y suit la loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda = \frac{3}{4}}$**.

L'espérance de Y est donc :

$$\mathbf{E(Y)} = \frac{1}{\lambda} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

b. Le retard total Z que cumule le train en arrivant à Londres est la somme du retard X pris à Paris et du retard Y pris durant le trajet ; ainsi :

$$\mathbf{Z = X + Y}$$

La durée moyenne en heures du retard de Mme A lors de son arrivée à Londres est l'espérance de Z ; par linéarité de l'espérance, il vient, d'après les questions 3.a et 4.a :

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6}$$

Ainsi **la durée moyenne en heures du retard de Mme A lors de son arrivée à Londres est 1 heure et 50 minutes**.