Corrigé

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

Exercice 1

1. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a, en notant I la matrice identité :

$$\begin{pmatrix} b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = M^0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+1} & a_{n+1} \\ 0 & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

On a, par hypothèse de récurrence et par définition de a_{n+1} et de b_{n+1} :

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n & b_n + 2a_n \\ 0 & 2b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+1} & a_{n+1} \\ 0 & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}}$$

2. D'après la formule de récurrence $b_{n+1} = 2b_n$, valable pour tout entier naturel n, **la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$**

On en déduit que, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{b_n} = b_0 q^n = \mathbf{2^n}$$

Par définition de a_{n+1}, et d'après l'expression de b_n, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{a_{n+1}} = 2a_n + b_n = \mathbf{2a_n + 2^n}$$

3.a. On a, pour tout entier naturel n :

$$c_{n+1} - c_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n+1} - 2a_n}{2^{n+1}} = \frac{2a_n + 2^n - 2a_n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2\cdot 2^n} = \frac{1}{2}$$

Donc **la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et de premier terme $c_0 = \frac{a_0}{2^0} = a_0 = 0$**.

b. On en déduit que, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{c_n} = c_0 + nr = \mathbf{\frac{n}{2}}$$

c. Par définition de c_n, et d'après l'expression de c_n, on déduit qu'on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{a_n} = 2^n c_n = 2^n \cdot \frac{n}{2} = \mathbf{n2^{n-1}}$$

4. On déduit alors des questions 1, 2 et 3.c qu'on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{M^n} = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2^n} & \mathbf{n2^{n-1}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2^n} \end{pmatrix}$$

5. Application au calcul d'une somme

a. Il résulte de la question 2 les équivalences suivantes, valables pour tout entier naturel k :

$$a_{k+1} = 2a_k + 2^k \Leftrightarrow a_{k+1} = a_k + a_k + 2^k \Leftrightarrow a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel k** :

$$\mathbf{a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k}$$

b. On a, par linéarité de la somme et changement d'indice, **pour tout entier naturel n** :

$$\sum_{k=0}^{n}(\mathbf{a_{k+1}} - \mathbf{a_k}) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\right) = a_{n+1} - a_0 = \mathbf{a_{n+1}}$$

c. Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} 2^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2^0 et de raison 2 ; on a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{2^k} = 2^0 \cdot \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \mathbf{2^{n+1} - 1}$$

d. En utilisant successivement les questions 3.c, 5.a, 5.b, 5.c et 3.c, il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{k2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}\left(a_{k+1} - a_k - 2^k\right) = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) - \sum_{k=0}^{n} 2^k = a_{n+1} - \left(2^{n+1} - 1\right)$$
$$= (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1 = (n+1)2^n - 2.2^n + 1 = (n+1-2)2^n + 1 = \mathbf{(n-1)2^n + 1}$$

6. Application au calcul des puissances d'une autre matrice

a. Montrons que P est inversible et déterminons P^{-1}, en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les deux termes diagonaux de la matrice triangulaire ci-dessus étant non nuls, **P est une matrice inversible**.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} L_1 \leftarrow 1/2L_1 \\ L_2 \leftarrow 1/2L_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice P est donc la matrice :

$$\mathbf{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/2} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} \end{pmatrix}$$

b. Les calculs donnent :

$$\mathbf{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}$$

c. Montrons alors par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$P^{-1}A^nP = M^n$$

<u>Première étape</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I = M^0$$

<u>Deuxième étape</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$P^{-1}A^nP = M^n$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$P^{-1}A^{n+1}P = M^{n+1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 6.b :

$$M^{n+1} = M^nM = P^{-1}A^nPP^{-1}AP = P^{-1}A^nIAP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{P^{-1}A^nP = M^n}$$

On a, pour tout entier naturel n, l'équivalence :

$$P^{-1}A^nP = M^n \Leftrightarrow A^n = PM^nP^{-1}$$

Il en résulte, d'après les questions que, pour tout entier naturel n :

$$PM^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + n2^{n-1} \\ -2^n & 2^n - n2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Puis, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{A^n} = PM^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n + n2^{n-1} \\ -2^n & 2^n - n2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2^n + n2^{n-2}} & \mathbf{n2^{n-2}} \\ \mathbf{-n2^{n-2}} & \mathbf{2^n - n2^{n-2}} \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 2</u>

1.a. On a :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(\ln x - 2x + 3) = -\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0}(-2x+3) = 3$$

On en déduit que **l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C**.

b. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln x - 2x + 3) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 2 + \frac{3}{x}\right) = -\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \text{ (par croissance comparée) et } \lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{3}{x}\right) = -2$$

2. On a, **pour tout réel x strictement positif** :

$$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}}$$

Puisque x est strictement positif sur $]0,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1-2x$ sur $]0,+\infty[$; on a :

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1-2x < 0 \Leftrightarrow 1 < 2x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Le calcul donne :

$$\mathbf{f}\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + 3 = -\ln 2 - 1 + 3 = \mathbf{2 - \ln 2}$$

Puisque $\ln 2 \simeq 0,7$, une valeur approché de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est :

$$\mathbf{f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 1,3}$$

Le tableau des variations de f est donc le suivant :

x	**0**		$\mathbf{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f'	||	**+**	**0**	**−**	
f	|| $-\infty$	↗	$\mathbf{2-\ln 2}$	↘	$-\infty$

3. D'après la question 2, on a, pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

On en déduit que, pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) < 0$$

Donc **f est concave sur** $\mathbf{]0,+\infty[}$.

4.a. Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) + 1 = \mathbf{-x+2}$$

b. Puisque f est concave sur $]0,+\infty[$, C est en-dessous de toutes ses tangentes sur $]0,+\infty[$; donc, en particulier, **T est située au dessus de C sur** $\mathbf{]0,+\infty[}$.

5.a. f est continue (comme somme de fonctions qui le sont) et strictement croissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right]$, donc f est une bijection de $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ sur $f\left(\left]0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left]\lim\limits_{x\to 0} f(x), f\left(\frac{1}{2}\right)\right] =]-\infty, 2-\ln 2]$;

puisque $f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 1,3$, 0 appartient à $]-\infty, 2-\ln 2]$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

De même, f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, donc f est une bijection de

$\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ sur $f\left(\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right)=\left]\lim_{x\to+\infty} f(x),f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left]-\infty,2-\ln 2\right]$; puisque $f\left(\frac{1}{2}\right)\simeq 1{,}3$, 0 appartient à $\left]-\infty,2-\ln 2\right]$, donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique β dans $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Ainsi, **l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β dans $\left]0,+\infty\right[$ avec $\alpha<\beta$.**

b. On a :

$$f(1)=1 \text{ et } f(2)=\ln 2-1\simeq -0{,}3$$

Donc :

$$f(2)<f(\beta)=0<f(1)$$

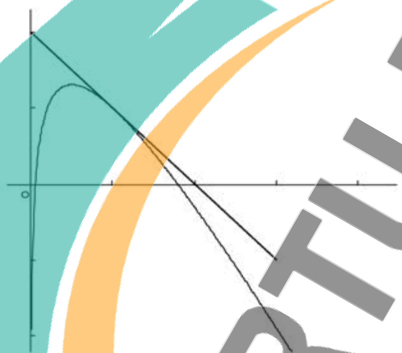
Puisque f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, il vient :

$$1<\beta<2$$

Ainsi a-t-on justifié que :

$$\beta\in\left]1,2\right[$$

6. L'allure de C et de T, dans le plan rapporté un repère orthonormé d'unité 2 cm, est la suivante :



Exercice 3

Partie I

1.a. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A,B\}$, il vient :

$$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)=P(A)P_A(D)+P(B)P_B(D)$$

La machine A produit un tiers des éléments, les autres étant produits par la machine B, donc :

$$P(A)=\frac{1}{3} \text{ et } P(B)=\frac{2}{3}$$

12% des balles fabriquées par la machine A et 9% de celles fabriquées par la machine B présentent un défaut, donc :

$$P_A(D)=\frac{12}{100} \text{ et } P_B(D)=\frac{9}{100}$$

On a donc :

$$\mathbf{P(D)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{100}+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{100}=\frac{4}{100}+\frac{6}{100}=\frac{10}{100}=\mathbf{\frac{1}{10}}$$

b. On constate que la balle prélevée présente un défaut. La probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A est :

$$\mathbf{P_D(A)}=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)P_A(D)}{P(D)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{100}}{\frac{1}{10}}=\frac{4}{100}\cdot 10=\mathbf{\frac{4}{10}}$$

2.a. X est le nombre de réalisations de l'événement D, de probabilité $p=\frac{1}{10}$, au cours de n prélèvements identiques et indépendants, donc **X suit la loi binomiale** $\mathcal{B}\left(\mathbf{n,p=\frac{1}{10}}\right)$.

Les valeurs prises par X sont celles de l'ensemble :

$$\mathbf{X(\Omega)=[\![0,n]\!]}$$

Et on a, **pour tout entier naturel k de** $[\![\mathbf{0,n}]\!]$:

$$\mathbf{P(X=k)}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\left(\mathbf{\frac{1}{10}}\right)^{\mathbf{k}}\left(\mathbf{\frac{9}{10}}\right)^{\mathbf{n-k}}$$

b. L'espérance et la variance de X sont respectivement, d'après les formules du cours :

$$\mathbf{E(X)}=np=n\cdot\frac{1}{10}=\mathbf{\frac{n}{10}} \text{ et } \mathbf{V(X)}=np(1-p)=\frac{n}{10}\cdot\frac{9}{10}=\mathbf{\frac{9n}{100}}$$

Partie II

1.a. Pour approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre λ, on doit avoir :

$$E(X)=E(Y)$$

Puisque $E(X)=\frac{n}{10}=3$ et $E(Y)=\lambda$, **la valeur du paramètre λ est $\lambda=3$**.

b. Les valeurs prises par Y sont celles de l'ensemble :

$$\mathbf{Y(\Omega)=\mathbb{N}}$$

Et on a, **pour tout entier naturel k** :

$$\mathbf{P(Y=k)}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\mathbf{e^{-3}\frac{3^k}{k!}}$$

c. La probabilité d'avoir au moins une balle présentant un défaut parmi les 30 balles prélevées est :

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)$$

Par lecture dans le tableau proposé, une valeur approchée de cette probabilité est :

$$\mathbf{P(Y\geq 1)}\simeq 1-0{,}0498=\mathbf{0{,}9502}$$

2.a. Puisque $E(X)=\frac{n}{10}=360$, $E(Z)=m$, $V(X)=\frac{9n}{100}=9\cdot 36=324=18^2$ et $V(Z)=\sigma^2$, les paramètres m et σ de la loi Z pour que X et Z aient la même espérance et la même variance sont :

$$\mathbf{m=360} \text{ et } \boldsymbol{\sigma=18}$$

b. La probabilité qu'il y ait au moins 396 balles défectueuses parmi les 3600 balles prélevées est :

$$P(Z\geq 396)=P\left(\frac{Z-m}{\sigma}\geq\frac{396-m}{\sigma}\right)=P\left(\frac{Z-m}{\sigma}\geq\frac{396-360}{18}\right)=P\left(\frac{Z-m}{\sigma}\geq 2\right)$$

Puisque $\frac{Z-m}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, il vient :

$$P(Z\geq 396)=1-P\left(\frac{Z-m}{\sigma}<2\right)=1-\Phi(2)$$

Par lecture dans la table proposée, une valeur approchée de cette probabilité est :

$$\mathbf{P(Z\geq 396)}=1-\Phi(2)\simeq 1-0{,}9772=\mathbf{0{,}0228}$$

Exercice 4

1.a. On a, **pour tout réel A supérieur ou égal à 1** :

$$\mathbf{I_A}=\int_1^A e^{-2t}dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_1^A=-\frac{1}{2}\left(e^{-2A}-e^{-2}\right)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{e^{-2}-e^{-2A}}\right)$$

Il vient donc :

$$\lim_{A\to+\infty}\mathbf{I_A}=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\left(e^{-2}-e^{-2A}\right)=\frac{\mathbf{e^{-2}}}{\mathbf{2}}$$

Car :

$$\lim_{A\to+\infty}e^{-2A}=0$$

Puisque :

$$\lim_{A\to+\infty}(-2A)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

b. f est continue sur $]-\infty,1[$ comme fonction constante nulle, ainsi que sur $[1,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues ; f admet des limites finies à droite et à gauche en 1 car :

$$\lim_{t\to1^-}f(t)=\lim_{t\to1^-}0=0 \text{ et } \lim_{t\to1^+}f(t)=f(1)=2$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ car on a :

$$f(t)=\begin{cases}0\geq 0 & \text{si } t<1\\ 2e^{-2t+2}>0 & \text{si } t\geq 1\end{cases}$$

On a enfin, sous réserve d'existence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int_{-\infty}^{1}0dt+\int_1^{+\infty}2e^{-2t+2}dt=0+2e^2\int_1^{+\infty}e^{-2t}dt=2e^2\lim_{A\to+\infty}I_A=2e^2\frac{e^{-2}}{2}=1$$

Donc **f est une densité de probabilité.**

2. Par définition de la fonction de répartition F de X, on a, pour tout réel x :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

Compte-tenu de la définition de la densité f, et de la question 1.a, il vient :

$$\begin{cases} \textbf{Si } \mathbf{x<1} \quad \mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \mathbf{0} \\ \textbf{Si } \mathbf{x \geq 1} \quad \mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{x} 2e^{-2t+2}dt = 0 + 2e^{2}\int_{1}^{x} e^{-2t}dt = 2e^{2}I_x = 2e^{2}\frac{1}{2}\left(e^{-2}-e^{-2x}\right) = \mathbf{1-e^{-2x+2}} \end{cases}$$

3.a. On a :

$$\mathbf{P(X\geq 2)} = 1-P(X<2) = 1-F(2) = 1-\left(1-e^{-2\cdot 2+2}\right) = \mathbf{e^{-2}}$$

$$\mathbf{P(X\leq 3)} = F(3) = 1-e^{-2\cdot 3+2} = \mathbf{1-e^{-4}}$$

$$\mathbf{P(2\leq X\leq 3)} = F(3)-F(2) = 1-e^{-4}-\left(1-e^{-2}\right) = \mathbf{e^{-2}-e^{-4}}$$

b. On a, d'après la question 2.a :

$$\mathbf{P_{(X\geq 2)}(X\leq 3)} = \frac{P\left((X\geq 2)\cap(X\leq 3)\right)}{P(X\geq 2)} = \frac{P(2\leq X\leq 3)}{P(X\geq 2)} = \frac{e^{-2}-e^{-4}}{e^{-2}} = \mathbf{1-e^{-2}}$$

4.a. On pose :

$$u(t)=t \qquad u'(t)=1$$

$$v'(t)=e^{-2t} \qquad v(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}$$

u, v, u' et v' étant continues sur $[1,A]$, il vient, grâce au théorème d'intégration par parties:

$$\mathbf{J_A} = \int_1^A te^{-2t}dt = \left[-\frac{1}{2}te^{-2t}\right]_1^A - \int_1^A\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)dt = -\frac{1}{2}Ae^{-2A}+\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}\int_1^A e^{-2t}dt$$

$$= -\frac{1}{2}Ae^{-2A}+\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}I_A = -\frac{1}{2}Ae^{-2A}+\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{4}\left(e^{-2}-e^{-2A}\right)$$

$$= \mathbf{-\frac{1}{2}Ae^{-2A}-\frac{1}{4}e^{-2A}+\frac{3}{4}e^{-2}}$$

b. Il vient donc :

$$\lim_{A\to+\infty}\mathbf{J_A} = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}Ae^{-2A}-\frac{1}{4}e^{-2A}+\frac{3}{4}e^{-2}\right) = \mathbf{\frac{3}{4}e^{-2}}$$

Car :

$\lim_{A\to+\infty} Ae^{-2A} = 0$ (admis dans l'énoncé) et $\lim_{A\to+\infty} e^{-2A} = 0$ (déjà vu à la question 1.a)

c. Par définition, et sous réserve d'existence, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

Il vient donc :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{1} t\cdot 0dt + \int_1^{+\infty} t\cdot 2e^{-2t+2}dt = 0+2e^2\int_1^{+\infty} te^{-2t}dt = 2e^2\lim_{A\to+\infty} J_A = 2e^2\frac{3}{4}e^{-2} = \frac{3}{2}$$

Ainsi **X admet une espérance**, et :

$$\mathbf{E(X) = \frac{3}{2}}$$

5.a. Par définition de G, fonction de répartition de la variable aléatoire Y, on a, **pour tout réel y** :

$$\mathbf{G(y)} = P(Y\leq y) = P(X-1\leq y) = P(X\leq y+1) = \mathbf{F(y+1)}$$

b. On a :

$$y+1>1 \Leftrightarrow y>0$$

D'après les questions 5.a et 2, on a :

$$\begin{cases} \textbf{Si } \mathbf{y<0} & \mathbf{G(y)}=\mathrm{F}(\mathrm{y}+1)=\mathbf{0} \\ \textbf{Si } \mathbf{y\geq 0} & \mathbf{G(y)}=\mathrm{F}(\mathrm{y}+1)=1-\mathrm{e}^{-2(\mathrm{y}+1)+2}=\mathbf{1-e^{-2y}} \end{cases}$$

En posant $\lambda=2$, G est de la forme :

$$\begin{cases} \text{Si } y<0 & G(y)=0 \\ \text{Si } y\geq 0 & G(y)=1-e^{-\lambda y} \end{cases}$$

On reconnaît que **G est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre** $\boldsymbol{\lambda=2}$.

c. D'après le cours, il vient :

$$\mathbf{V(Y)}=\frac{1}{\lambda^2}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

d. De la formule $V(aY+b)=a^2V(Y)$, il résulte que **X admet une variance** et que :

$$\mathbf{V(X)}=V(Y+1)=V(Y)=\mathbf{\frac{1}{4}}$$