Exercice 1

Des probabilités avec Scilab

1. $Y(\Omega)=\{1,\ldots,p\}$.
2. Puisqu'on a $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega)=\{1,\ldots,p\}$ et $X_i\leqslant Y$, l'événement $[Y=1]$ équivalent que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $X_i=1$. Donc

$$\begin{aligned}P(Y=1)&=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i=1]\right)\\&=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=1)\quad(\text{ car les variables } X_i \text{ sont indépendantes})\\&=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{p}=\left(\frac{1}{p}\right)^n.\end{aligned}$$

3. Soit $k\in\{1,\ldots,p\}$, on a $[Y\leqslant k]=\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\leqslant k]$, $P(X_1\leqslant k)=\frac{k}{p}$. Donc

$$\begin{aligned}P(Y\leqslant k)&=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\leqslant k]\right)\\&=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant k)\qquad=P(X_1\leqslant k)^n\quad(\text{ car les } Xi \text{ suivant la même loi})\\&=\left(\frac{k}{p}\right)^n.\end{aligned}$$

On a d'après la question précédente $P(Y=1)=\left(\frac{1}{p}\right)^n$, si $k>1$ on a

$$\begin{aligned}p_k&=P(Y=k)=P(Y\leqslant k)-P(Y\leqslant k-1)\\&=\left(\frac{k}{p}\right)^n-\left(\frac{k-1}{p}\right)^n\end{aligned}$$

4. — **function** $y=simulY(n,p)$
   — $X=grand(1,n,"uin",1,p)$; // (renvoie un vecteur ligne dont les coefficients sont des simulations indépendantes d'une loi uniforme sur l'intervalle d'entiers $[\![1,p]\!]$)
   — $y=max(X)$; // simulation de Y
   — **endfunction**

Exercice 2

un problème de moindre carrés

Soit n entier $\geqslant 2$. On considère n points $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, avec des x_i non tous égaux entre eux. on cherche à montrer qu'il existe existe des nombres réels λ et μ, uniques, qui rendent minimum la somme

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu - y_i)^2.$$

Pour tout entier naturel k, on pose $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ et $t_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i$.

1. **Première méthode :** On pose $f(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu - y_i)^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1.1. La fonction f est une fonction polynômiale, alors elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1.2.

$$\begin{aligned}\partial_1 f(\lambda, \mu) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \mu) &= \sum_{i=1}^{n} 2x_i(\lambda x_i + \mu - y_i)\\ &= 2(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i \mu - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i)\\ &= 2(\lambda s_2 + s_1 \mu - t_1).\end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned}\partial_2 f(\lambda, \mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda, \mu) &= \sum_{i=1}^{n} 2(\lambda x_i + \mu - y_i)\\ &= 2(\lambda s_1 + s_0 \mu - t_0).\end{aligned}$$

1.3. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $< .,. >$. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a

$$s_2 =< X, X >, \quad s_0 =< Z, Z > \text{ et } s_1 =< X, Z >$$

Donc on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$S_1^2 = (< X, Z >^2) < (< X, X >< Z, Z >) = s_2 s_0$$

l'inégalité est stricte car X et Z ne sont pas colinéaire car les x_i non tous égaux entre eux. D'où $s_0 s_2 - s_1^2 > 0$.

1.4. Soit (λ_0, μ_0) un point critique de f, alors on a

$$\begin{aligned}\begin{cases}\partial_2 f(\lambda_0, \mu_0) = 0\\ \partial_2 f(\lambda_0, \mu_0) = 0\end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases}\lambda_0 s_2 + s_1 \mu_0 - t_1 = 0\\ \lambda_0 s_1 + s_0 \mu_0 - t_0 = 0\end{cases}\\ &\Longrightarrow \begin{cases}\lambda_0 = \frac{-s_1\mu_0 + t_1}{s_2} \quad (\text{ car } s_2 \neq 0)\\ \mu_0 = \frac{-s_1 t_1 + s_2 t_0}{s_0 s_2 - s_1^2} \quad (\text{ car } s_0 s_2 - s_1^2 > 0)\end{cases}\\ &\Longrightarrow \begin{cases}\lambda_0 = \frac{s_0 t_1 - s_1 t_0}{s_0 s_2 - s_1^2}\\ \mu_0 = \frac{-s_1 t_1 + s_2 t_0}{s_0 s_2 - s_1^2}\end{cases}\end{aligned}$$

Alors f admet un unique point critique $(\lambda_0, \mu_0) = (\frac{s_0 t_1 - s_1 t_0}{s_0 s_2 - s_1^2}, \frac{-s_1 t_1 + s_2 t_0}{s_0 s_2 - s_1^2})$.
Montrons que f admet un minimum globale stricte en ce point. Il suffit de montrer que, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $f((\lambda, \mu) + (\lambda_0, \mu_0)) - f(\lambda_0, \mu_0) > 0$. En effet :

$$
\begin{aligned}
f\left((\lambda,\mu)+(\lambda_0,\mu_0)\right)-f(\lambda_0,\mu_0) &= \sum_{i=1}^{n}((\lambda+\lambda_0)x_i+(\mu+\mu_0)-y_i)^2-(\lambda_0x_i+\mu_0-y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+\mu+(\lambda_0x_i+\mu_0-y_i))^2-(\lambda_0x_i+\mu_0-y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+\mu)^2+2(\lambda x_i+\mu)(\lambda_0x_i+\mu_0-y_i)+(\lambda_0x_i+\mu_0-y_i)^2-(\lambda_0x_i+\mu_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+\mu)^2+2(\lambda x_i+\mu)(\lambda_0x_i+\mu_0-y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda^2x_i^2+2\lambda\mu x_i+\mu^2+2(\lambda\lambda_0x_i^2+\lambda\mu_0x_i-\lambda x_iy_i+\mu\lambda_0x_i+\mu\mu_0-\mu y_i) \\
&= \lambda^2S_2+2\lambda\mu s_1+s_0\mu^2+2(\lambda\lambda_0s_2+\lambda\mu_0s_1-\lambda t_1+\mu\lambda_0s_1+\mu\mu_0s_0-\mu t_0) \\
&= \lambda^2+2\lambda(\mu s_1+\overbrace{\lambda_0s_2+\mu_0s_1-t1}^{=0})+\mu\overbrace{(\lambda_0s_1+\mu_0s_0-t_0)}^{=0}+s_0\mu^2 \quad (*) \\
&= \lambda^2s_2+2\lambda\mu s_1+s_0\mu^2.
\end{aligned}
$$

l'égalité $(*)$ d'après la question [1.3].
Donc $f\left((\lambda,\mu)+(\lambda_0,\mu_0)\right)-f(\lambda_0,\mu_0)=\lambda^2s_2+2\lambda\mu s_1+s_0\mu^2$ est un polynôme de degré 2, dont de discriminant est

$$\Delta(\mu)=(2\mu s_1)^2-4s_2s_0\mu^2=4\mu^2(s_1^2-s_2s_0)<0$$

car d'après la question précédente $s_2s_0-s_1^2>0$. D'où

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, f\left((\lambda,\mu)+(\lambda_0,\mu_0)\right)-f(\lambda_0,\mu_0)>0$$

car tout polynôme de degré 2 dont le discriminant strictement négative est strictement positive.
Donc f admet un minimum globale stricte en point critique (λ_0,μ_0).

Conclusion : l'uniques nombres réels λ et μ, qui rendent minimum la somme $\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+\mu-y_i)^2$. sont

$$\lambda_0=\frac{s_0t_1-s_1t_0}{s_0s_2-s_1^2},\quad \mu_0=\frac{-s_1t_1+s_2t_0}{s_0s_2-s_1^2}$$

2. **Deuxième méthode :** $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $e=(1,\dots,1)$.

   2.1. Posons $y=(y_1,\dots,y_n)$, on a

$$
\begin{aligned}
||y-(\lambda x+\mu e)||^2 &= ||(y_1,\dots,y_n)-\lambda(x_1,\dots,x_n)-\mu(1,\dots,1)||^2 \\
&= ||(y_1-\lambda x_1-\mu,\dots,y_n-\lambda x_n-\mu)||^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\lambda x_i-\mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+\mu-y_i)^2 \quad (\text{car } (y_i-\lambda x_i-\mu)^2=(\lambda x_i+\mu-y_i)^2).
\end{aligned}
$$

   2.2. Soit $F=vect\{x,e\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par x et e. On applique la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. On a la famille $\{f_1,f_2\}$ est une base orthonormée de F, où

$$f_1=\frac{x}{||x||}=\frac{x}{\sqrt{s_2}}$$

$$f_2=\frac{e-<e,f_1>f_1}{||e-<e,f_1>f_1||}=\frac{e-\frac{<e,x>}{s_2}x}{||e-\frac{<e,x>}{s_2}x||}=\frac{e-\frac{s_1}{s_2}x}{||e-\frac{s_1}{s_2}x||}=\frac{s_2e-s_1x}{||s_2e-s_1x||}$$

Par la caractérisation de la projection orthogonale, on a $P_F(y) =< y, f_1 > f_1+ < y, f_2 > f_2$. On a

$$< y, f_1 > f_1 =< y, \frac{x}{\sqrt{s_2}} > \frac{x}{\sqrt{s_2}} = \frac{< y, x >}{s_2}x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{s_2}x = \frac{t_1}{s_2}x$$

$$\begin{aligned}< y, f_2 > f_2 &=< y, \frac{s_2e - s_1x}{||s_2e - s_1x||} > \frac{s_2e - s_1x}{||s_2e - s_1x||} = \frac{s_2 < y, e > -s_1 < y, x >}{||s_2e - s_1x||^2}(s_2e - s_1x)\\ &= \frac{s_2t_0 - s_1t_1}{||s_2e - s_1x||^2}(s_2e - s_1x)\\ &= \frac{s_2t_0 - s_1t_1}{s_2(s_0s_2 - s_1^2)}(s_2e - s_1x) \quad (\text{car } ||s_2e - s_1x||^2 = s_2(s_0s_2 - s_1^2))\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}P_F(y) &= \frac{t_1}{s_2}x + \frac{s_2t_0 - s_1t_1}{s_2(s_0s_2 - s_1^2)}(s_2e - s_1x)\\ &= \frac{s_0t_1 - s_1t_0}{s_0s_2 - s_1^2}x + \frac{-s_1t_1 + s_2t_0}{s_0s_2 - s_1^2}e\end{aligned}$$

2.3. D'après le théorème de la Caractérisation du projeté orthogonal par minimisation de norme. On a

$$\min_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu - y_i)^2 = \min_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2} ||y - (\lambda x + \mu e)||^2 = ||y - P_F(y)||^2$$

C'est à dire que l'unique couple (λ, μ) qui rendent minimum la somme $\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu - y_i)^2$ est celui qui vérifie $P_F(y) = \lambda x + \mu e$ et d'après la question précédente, on a $\lambda = \frac{s_0t_1 - s_1t_0}{s_0s_2 - s_1^2}$ et $\mu = \frac{-s_1t_1 + s_2t_0}{s_0s_2 - s_1^2}$.

D'où l'uniques nombres réels λ et μ, qui rendent minimum la somme $\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu - y_i)^2$. sont

$$\lambda = \frac{s_0t_1 - s_1t_0}{s_0s_2 - s_1^2}, \quad \mu = \frac{-s_1t_1 + s_2t_0}{s_0s_2 - s_1^2}$$

PROBLEME 1

$1^{\text{ère}}$ Partie

Étude de la diagonalisabilité de M.

1.1. Recherche du rang de M.

1.1.1 On a les vecteurs lignes de la matrice M sont dans le sous-espace $vect\{(1, 1, 1)\}$ qui est de dimension 1. Alors le rang de M ne dépasse pas 1. c'est à dire $rang(M) \leqslant 1$.
On sais que "M est inversible si, et seulement si $rang(M) = 3$", et puis que $rang(M) < 3$ alors M n'est pas inversible.

1.1.2. Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, alors $M = 0$ (matrice nulle de taille 3). Donc $rang(M) = 0$.
Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors M non nulle, donc $rang(M) = 1$.

1.2. Recherche d'une base du noyau $ker(u)$ de u.

1.2.1. On utilise le théorème de rang $dim \ker u + rang(u) = 3$, implique que, $dim \ker u = 3 - rang(M)$, et d'après la question 1.1.2 on a :
Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, alors $dim \ker u = 3 - 0 = 3$.
Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors $dim \ker u = 3 - 1 = 2$.

1.2.2. On sais que $\ker u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Alors

Si $(a,b,c)=(0,0,0)$, on a $dim \ker u = 3 = dim\mathbb{R}^3$, d'où dans ce cas, on a $\ker u=\mathbb{R}^3$, donc tout base de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\ker u$.

Si $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, on a $dim \ker u = 2$. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker u$, alors

$$\begin{aligned}MX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} &\implies \begin{cases}a(x+y+z)=0\\b(x+y+z)=0\\c(x+y+z)=0\end{cases}\\ &\implies x+y+z=0 \quad (\text{ car l'un des } a,b,c \text{ est non nul})\\ &\implies z=-x-y.\end{aligned}$$

Alors $X=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Donc $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\ker u$. (elle est clairement que cette famille est libre).

1.3. Dans cette question, on pose $s=a+b+c$.

1.3.1.

$$M^2=\begin{pmatrix}a&a&a\\b&b&b\\c&c&c\end{pmatrix}^2=(a+b+c)\begin{pmatrix}a&a&a\\b&b&b\\c&c&c\end{pmatrix}=sM.$$

1.3.2. u est un projecteur si, et seulement si $u^2=u$. De plus $u^2=u$ si, et seulement si $M^2=M$. On a d'après la question précédente $M^2=sM$, alors

$$\begin{aligned}M^2=M &\iff sM=M\\ &\iff sa=a,\quad sb=b,\quad sc=c\end{aligned}$$

Donc u est un projecteur si, et seulement si $sa=a,\quad sb=b$ et $sc=c$ si, et seulement si $(a,b,c)=(0,0,0)$ ou $s=1$.

1.4. Dans cette question, on pose aussi $s=a+b+c$.

1.4.1. Si $s=0$, alors on a d'après la question [1.3.1], $M^2=0$(matrice nulle) donc le polynôme X^2 est un polynôme annulateur de M qui admet 0 comme l'unique racine. D'où 0 est l'unique valeur propre de u (car une valeur propre de u est une racine de son polynôme annulateur).

1.4.2. Supposons que $s=0$, montrons que M est diagonalisable si, et seulement si, $(a,b,c)=(0,0,0)$.

• Condition suffisant : Si $(a,b,c)=(0,0,0)$, alors $M=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ est une matrice diagonale donc elle est diagonalisable.

• Condition nécessaire : Supposons que M est diagonalisable, et on a d'après la question [1.4.1], 0 est l'unique valeur propre de M, donc il existe une famille $\mathscr{E}=\{X_1,X_2,X_3\}$ de vecteurs propres associés à la valeur propre 0, forme une base $\mathbb{R}^3$, c'est à dire $MX_1=MX_2=MX_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Donc M est nulle, d'où $(a,b,c)=(0,0,0)$.

1.5. Dans cette question, on pose $s=a+b+c$ et on suppose que $s\neq0$.

1.5.1. On a $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_2 - e_3$ et $f_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$, On a $\mathscr{B}_1$ de cardinal égale à 3, alors il suffit de montrer que $\mathscr{B}_1$ est libre.

Soient x, y, z dans $\mathbb{R}$ tel que $xf_1 + yf_2 + zf_3 = 0$. Alors

$$x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + az = 0 \\ -x + y + bz = O \\ -y + cz = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -az \\ az + cz + bz = O \\ y = cz \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -az \\ z = O \\ y = cz \end{cases} \qquad \text{car } a + b + c \neq 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\mathscr{B}_1$ est libre, alors est une base de $\mathbb{R}^3$.

1.5.2. On a $u(f_1) = u(e_1) - u(e_2) = (ae_1 + be_2 + ce_3) - (ae_1 + be_2 + ce_3) = 0$, $u(f_2) = u(e_2) - u(e_3) = (ae_1 + be_2 + ce_3) - (ae_1 + be_2 + ce_3) = 0$,

et $u(f_3) = au(e_1) + bu(e_2) + cu(e_3) = a(ae_1 + be_2 + ce_3) + b(ae_1 + be_2 + ce_3) + c(ae_1 + be_2 + ce_3) = sf_3$.

Alors la matrice Δ de u dans la base $\mathscr{B}_1$ est :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

1.5.3. On a d'après la question précédente qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ ($\mathscr{B}_1$) tel que la matrice de u dans cette base est diagonale alors l'endomorphisme u est diagonalisable, d'où M est diagonalisable (la matrice d'un endomorphisme diagonalisable).

Et puisqu'on a la matrice diagonale Δ admet deux valeurs propres distinctes $\{0, s\}$ (car $s \neq 0$) alors $Sp(M) = Sp(\Delta) = \{0, s\}$.

1.5.4. On considère la matrice $K_\alpha = M - \alpha I_3$, où α est un réel.

i. D'après la formule de changement de base, on a $M = P\Delta P^{-1}$, où P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_1$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c \end{pmatrix}$$

On a $K_\alpha = M - \alpha I_3 = P\Delta P^{-1} - \alpha PP^{-1} = P(\Delta - \alpha I_3)P^{-1} = P\Delta_\alpha P^{-1}$, donc

$$K_\alpha = P\Delta_\alpha P^{-1}, \quad \text{où } \Delta_\alpha = \Delta - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & s - \alpha \end{pmatrix}.$$

ii. On a d'après la question précédente K_α est semblable à la matrice diagonale Δ_α dont ces éléments diagonales sont $\{-\alpha, s - \alpha\}$. Alors K_α est inversible si, et seulement si, Δ_α l'est.

On a la matrice $\Delta_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & s-\alpha \end{pmatrix}$ est inversible si, est seulement si, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq s$.

D'où K_α est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq s$.

1.6. **Application :** On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - (-1)I_3 = M - \alpha I_3$$

où $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha = -1$.

On a dans ce cas $s = a + b + c = -1 \neq 0$, la condition de la question [1.5] est vérifié. D'après la question [1.5.3], on a M est diagonalisable et $Sp(M) = \{0, -1\}$, et d'après la question $[1.5.4 - i]$, on a $A = P\Delta_{(-1)}P^{-1}$, où $\Delta_{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc A est diagonalisable et $Sp(A) = Sp(\Delta_{(-1)}) = \{0, 1\}$.

On a dans ce cas $\alpha = -1 = s$, donc d'après la question $[1.5.4 - ii]$ la matrice $A = K_{-1}$ n'est pas inversible.

2ème Partie

2.1. Soit $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{R}}$ la fonction définie par $f(x) = \lambda e^x e^{-\lambda e^x}$, avec $\lambda > 0$.

2.1.1. On a la fonction f est positive (car la fonction exponentiel est positive et $\lambda > 0$) et continue (produit et composé de fonctions continues). Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^x e^{-\lambda e^x} dx \\ &= \lim_{A\to-\infty} \lim_{B\to+\infty} \int_A^B \lambda e^x e^{-\lambda e^x} dx \\ &= \lim_{A\to-\infty} \lim_{B\to+\infty} \left[-e^{-\lambda e^x}\right]_A^B \\ &= \lim_{A\to-\infty} \lim_{B\to+\infty} \left[e^{-\lambda e^A} - e^{-\lambda e^B}\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.1.2. Soit U une variable aléatoire de densité f et $V = \exp(U)$. Déterminons la fonction de répartition F_V de V. On a la fonction exp est strictement positive alors V est à valeur positive, donc si $x \leqslant 0$, $F_V(x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leqslant x) = P(\exp(U) \leqslant x) = P(U \leqslant \ln x) \quad \text{(car la fonction ln est croissante)} \\ &= F_U(\ln x). \end{aligned}$$

On a $F_U(y) = \int_{-\infty}^{y} \lambda e^x e^{-\lambda e^x} dx = \lim_{A\to-\infty} \left[-e^{-\lambda e^x}\right]_A^x = 1 - e^{-\lambda e^y}$.

D'où

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire V est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ saut peut-être en 0, alors V est une variable aléatoire à densité, suivant la loi exponentiel de paramètre λ.

2.2. $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

2.3. Par l'absurde, supposons que $X + Y$ suit une loi exponentielle de paramètre μ. Alors d'après la linéarité de l'espérance et d'indépendances de X et Y, on a

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{2}{\lambda}, \quad V(X+Y) = V(X) + V(X) = \frac{2}{\lambda} \quad (*)$$

d'autre part

$$E(X+Y) = \frac{1}{\mu}, \quad V(X+Y) = \frac{1}{\mu^2} \quad (**)$$

de $*$ et $**$, on a $\mu = \frac{\lambda}{2}$ et $\mu^2 = \frac{\lambda^2}{2}$, alors d'un part $\mu^2 = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$ et d'autre part $\mu^2 = \frac{\lambda^2}{2}$, contradiction. D'où $X + Y$ ne peut pas suivre une loi exponentielle.

2.4 .

2.4.1. Si f_U et F_V sont nulle sur $\mathbb{R}^-$, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_W(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_U(t)f_V(x-t)dt + \int_0^x f_U(t)f_V(x-t)dt + \int_x^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t)dt$$

et puis que f_U est nulle sut $\mathbb{R}^-$, alors la fonction $t \longmapsto f_U(t)f_V(x-t)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$, donc $\int_{-\infty}^0 f_U(t)f_V(x-t)dt = 0$.
De même, on a f_V est nulle sut $\mathbb{R}^-$, donc si $t \in]x, +\infty[$, alors $f_V(x-t) = 0$ (car $x - t < 0$). Alors la fonction $t \longmapsto f_U(t)f_V(x-t)$ est nulle sur $]x, +\infty[$. Donc $\int_x^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t)dt = 0$.
D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_W(x) = \int_0^x f_U(t)f_V(x-t)dt.$$

2.4.2. On $S = X + Y + Z = W + Z$, où $W = X + Y$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = f_Y(x) = f_Z(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

. Et on a S à valeurs positives, alors $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $f_S(x) = 0 \quad (*)$.
Alors d'après la question précédente on a, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f_W(x) &= \int_0^x f_U(t)f_V(x-t)dt = \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda t} e^{-\lambda(x-t)}dt \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x dt \\ &= \lambda^2 x e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

D'où $f_W(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
De même on a,

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_0^x f_W(t)f_V(x-t)dt = \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda(x-t)}dt \\ &= \lambda^3 e^{-\lambda x} \int_0^x t dt \\ &= \lambda^3 e^{-\lambda x} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \\ &= \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x} \quad (**) \end{aligned}$$

Dans $(*)$ et $(**)$, on a $f_S(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2.5. Étude de la matrice aléatoire $M_1 = \begin{pmatrix} X & X & X \\ Y & Y & Y \\ Z & Z & Z \end{pmatrix}$.

2.5.1. On considère A_1 l'événement que la matrice M_1 ne soit pas diagonalisable. On a d'après la question [1.5.3] de la partie 1, si $S > 0$ (S est à valeurs positives, alors il suffit de discuter le cas de $S = 0$ et le cas de $S > 0$), alors M_1 est diagonalisable ($\overline{A_1}$ est réalisé). C'est à dire que $[S > 0] \subset \overline{A_1}$, implique que $A \subset [S = 0]$, d'où

$$P(A) \leqslant P(S = 0) = 0$$

D'où les résultats.

2.5.2. On considère B_1 l'événement que la matrice M_1 ait une valeur propre de valeur absolue $\geqslant 1$. On a d'après la question [1.5.3] de la première partie $Sp(M_1) = \{0, S\}$. Alors, M_1 ait une valeur propre de valeur absolue $\geqslant 1$ si, et seulement si , $S \geqslant 1$ (car S est à valeurs positives). D'où

$$\begin{aligned} P(B_1) = P(S \geqslant 1) &= \int_1^{+\infty} f_S(x)dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2}(\lambda^2 + 2\lambda + 2) \quad \text{(par l'intégration par partie)} \end{aligned}$$

PROBLEME 2

1ère Partie
Structure de l'ensemble $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$.

Soit $r \geqslant A$ un entier naturel et soit $P = X^r - \sum\limits_{q=0}^{r-1} a_q X^q$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré r.

3.1. On a la suite nulle (c-à-d $(u_n)_n$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$) est dans $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$, donc $\mathscr{I}_P(\mathbb{K}) \neq \varnothing$.
Soient $u = (u_n)_n$, $v = (v_n)_n$ deux suites dans $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\lambda u + v = (\lambda u_n)_n + v = (v_n)_n = (\lambda u_n + v_n)_n$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,on a

$$\begin{aligned} \lambda u_n + v_n &= \lambda(\sum_{q=0}^{r-1} a_q u_{n+q}) + \sum_{q=0}^{r-1} a_q v_{n+q} \\ &= \sum_{q=0}^{r-1} a_q(\lambda u_{n+q} + v_{n+q}) \\ &= \sum_{q=0}^{r-1} a_q(\lambda u + v)_{n+q}. \end{aligned}$$

D'où $\lambda u + v \in \mathscr{I}_P(\mathbb{K})$. Donc $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de E.

3.2. Détermination de la dimension de $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$

3.2.1. Soient $u = (u_n)_n$, $v = (v_n)_n$ deux suites dans $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathscr{I}_P(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda u + v) &= \Phi\left((\lambda u_k + v_k)_{k \in \mathbb{N}}\right) \\ &= (\lambda u_0 + v_0, \ldots, \lambda u_{r-1} + v_{r-1}) \\ &= \lambda(u_0, \ldots, u_{r-1}) + (v_0, \ldots, v_{r-1}) \\ &= \lambda\Phi(u) + \Phi(v). \end{aligned}$$

Alors Φ est une application linéaire de $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^r$. Montrons qu'elle est bijective.
Injectivité : Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$ tel que $\Phi(u)=(u_0,\dots,u_{r-1})=(0,\dots,0)$, c'est à dire que $\forall i\in[\![0,r-1]\!]$, $u_i=0$. Montrons par récurrence fort que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$.
Pour $\forall i\in[\![0,r-1]\!]$, $u_i=0$ $n=r$, on a $u_r=u_{0+r}=\sum\limits_{q=0}^{r-1}a_qu_q=0$, d'où les résultats pour $n=r$.
Supposons les résultats est vrai $\forall i\in[\![0,n-1]\!]$, où $n\geqslant r$, on a

$$u_n=u_{(n-r)+r}=\sum_{q=0}^{r-1}a_qu_{n-r+q}=0$$

car $\forall q\in[\![0,r-1]\!]$, $n-r+q\leqslant n-1$, et par l'hypothèse de récurrence, $u_{n-r+q}=0$. D'où d'après le principe de récurrence on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=0$, donc l'application Φ est injective.
La surjectivité : Soit $(b_0,\dots,b_{r-1})\in\mathbb{K}^r$, soit $u=(u_n)_n\in E$, définie par récurrence suivant : $\forall i\in[\![0,r-1]\!]$, $u_i=b_i$ et $\forall n\geqslant r$, $u_n=\sum\limits_{q=0}^{r-1}a_qu_{n-r+q}$, on a

$$\Phi(u)=(u_0,\dots,u_{r-1})=(b_1,\dots,b_{r-1})$$

d'où Φ est surjective. Alors Φ est un isomorphisme de $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^r$.

3.2.2. D'après la question précédente, on a $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^r$ sont isomorphe, alors ils sont de même dimension, et puisqu'on a $\dim\mathbb{K}^r=r$, alors $\dim\mathscr{I}_P(\mathbb{K})=r=deg(P)$.

3.3. Étude de l'opérateur $\mathscr{D}$ en relation avec $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$.

3.3.1. Il est claire que pour tout suit $(u_n)_n$ dans E, $\mathscr{D}((u_n)_n)\in E$. Montrons que $\mathscr{D}$ est linéaire. Soient $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E et $\lambda\in\mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(\lambda u+v)&=\mathscr{D}((\lambda u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}})\\&=(\lambda u_{n+1}+v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\\&=\lambda((u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})+(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\\&=\lambda\mathscr{D}(u)+\mathscr{D}(v)\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{D}$ est un endomorphisme de E(Application linéaire de E dans E).

3.3.2. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\in E$, on a $\mathscr{D}^0((u_k)_{k\in\mathbb{N}})=id_E((u_k)_{k\in\mathbb{N}})=(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathscr{D}^1((u_k)_{k\in\mathbb{N}})=((u_{k+1})_{k\in\mathbb{N}})$, par récurrence on a, pour tout $q\in\mathbb{N}$,

$$\mathscr{D}^q((u_k)_{k\in\mathbb{N}})=(u_{q+k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

3.3.3. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$. On a

$$\begin{aligned}P(\mathscr{D})(u)&=\mathscr{D}^r((u_n)_{n\in\mathbb{N}})-\sum_{q=0}^{r-1}a_q\mathscr{D}^q((u_n)_{n\in\mathbb{N}})\\&=(u_{n+r})_{n\in\mathbb{N}}-\sum_{q=0}^{r-1}a_q(u_{n+q})_{n\in\mathbb{N}}\\&=\left(u_{n+r}-\sum_{q=0}^{r-1}a_qu_{n+q}\right)_{n\in\mathbb{N}}\qquad(*)\end{aligned}$$

D'après $(*)$, on a $P(\mathscr{D})((u_n)_{n\in\mathbb{N}})=(0)_{n\in\mathbb{N}}$ si, et seulement si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+r}=\sum\limits_{q=0}^{r-1}a_qu_{n+q}$, c'est à dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ker P(\mathscr{D})$ si, et seulement si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$. D'où $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})=\ker P(\mathscr{D})$.

2ème Partie
Étude de $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$ dans un cas particulier

On s'intéresse ici à la détermination de $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$ dans le cas où $P=(X-1)^r$ avec $r\in\mathbb{N}$ et $r\geqslant 2$.

4.1 .

4.1.1. Δ est bien définie. Soient $Q,\, Q'\in\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda Q+Q') &= (\lambda Q+Q')(X+1)-(\lambda Q+Q')(X)\\ &= \lambda Q(X+1)+Q'(X+1)-\lambda Q(X)-Q'(X)\\ &= \lambda\Delta(Q)+\Delta(Q').\end{aligned}$$

D'où Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

4.1.2. Si $Q(X)=\sum\limits_{i=0}^{m} b_iX^i\in\mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant de degré $m\geqslant 1$ ($b_m\neq 0$). On a

$$\begin{aligned}\Delta(Q)(X)=Q(X+1)-Q(X) &= \sum_{i=0}^{m} b_i(X+1)^i-\sum_{i=0}^{m} b_iX^i\\ &= b_m(X+1)^m+\sum_{i=0}^{m-1} b_i(X+1)^i-b_mX^m-\sum_{i=0}^{m-1} b_iX^i\\ &= b_m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}X^k+\sum_{i=0}^{m-1} b_i(X+1)^i-b_mX^m-\sum_{i=0}^{m-1} b_iX^i\\ &= b_m\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}X^k+\sum_{i=0}^{m-1} b_i((X+1)^i-X^i)\quad (*)\end{aligned}$$

dans $(*)$, si $m=1$, on a $\Delta(Q)(X)=b_1$ [1]. Si $m\geqslant 2$, à partir de $(*)$, on a

$$\begin{aligned}\Delta(Q)(X) &= b_m\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}X^k+\sum_{i=0}^{m-1} b_i((X+1)^i-X^i)\\ &= b_m\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}X^k+\sum_{i=0}^{m-1} b_i(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}X^k-X^i)\\ &= b_m\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}X^k+b_{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}X^k-b_{m-1}X^{m-1}+\sum_{i=0}^{m-2} b_i\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}X^k-X^i\right)\\ &= b_m\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}X^k+b_{m-1}\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m-1}{k}X^k+\sum_{i=0}^{m-2} b_i\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}X^k-X^i\right)\quad [2]\end{aligned}$$

donc de [1] et de [2], on a $deg(\Delta(Q))=m-1$, et son coefficient dominant est $b_m\binom{m}{m-1}=mb_m$.

4.1.3. Soit $Q\in\mathbb{K}_r[X]$ non constant. On a d'après la question précédente, $deg(\Delta(Q))=deg(Q)-1\leqslant r-1$, c'est à dire $\Delta(Q)\in\mathbb{K}_{r-1}[X]$. Si Q est constant on a $\Delta(Q)=0\in\mathbb{K}_{r-1}[X]$, d'où $\Delta(\mathbb{K}_r[X])\subset\mathbb{K}_{r-1}[X]$.
De même on a $\Delta(\mathbb{K}_{r-1}[X])\subset\mathbb{K}_{r-1}[X]$ c'est à dire que $\mathbb{K}_{r-1}[X]$ est stable par Δ.

4.1.4. On a si Q un polynôme constant, alors $\Delta(Q)=0$, et la famille $\{1,X,\dots,X^{r-1}\}$ est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$, montrons que $\forall k\in[\![1,r-1]\!]$, $\Delta_r^r(X^k)=0$. Soit $k\in[\![1,r-1]\!]$, on a $deg(\Delta_r(X^k))=k-1$, $deg(\Delta_r^2(X^k))=k-2$ ainsi de suite, on a donc $deg(\Delta_r^k)(X^k)=0$, alors le polynôme $\Delta_r^k)(X^k)$ est constant donc

$$\Delta_r(\Delta_r^k)(X^k)=\Delta_r^{k+1}(X^k)=0$$

et puisque $k+1\leqslant r$ alors $\Delta_r^r(X^k)=0$. Alors Δ_r^r annuler les éléments de la base canonique de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$, donc Δ_r^r est nul.

4.2. On considère l'application

$$\begin{aligned}\Psi:\mathbb{K}_{r-1}[X] &\longrightarrow E\\ Q &\longmapsto (Q(k))_{k\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

4.2.1. Soient $Q, Q' \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda Q + Q') &= ((\lambda Q + Q')(k))_{k\in\mathbb{N}} = (\lambda Q(k) + Q'(k))_{k\in\mathbb{N}}\\ &= \lambda(Q(k))_{k\in\mathbb{N}} + (Q'(k))_{k\in\mathbb{N}}\\ &= \lambda\Psi(Q) + \Psi(Q')\end{aligned}$$

Alors Ψ est une application linéaire.
Soit $Q \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$ tel que $\Psi(Q) = (0)_{k\in\mathbb{N}}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $Q(k) = 0$, donc Q admet un infinité de racines, alors $Q = 0$. D'où Ψ est injective.

4.2.2. On applique le théorème de rang. On a $r = \dim \mathbb{K}_{r-1}[X] = \dim \ker(\Psi) + \dim Im(\Psi) = \dim Im(\Psi)$, car $\ker(\Psi) = \{0\}$. Donc $\dim Im(\Psi) = r$.

4.3. Expressions des éléments de $\mathscr{I}_{(X-1)^r}(\mathbb{K})$.

4.3.1. Soit $Q \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$, on a

$$(\mathscr{D} - id_E) \circ \Psi(Q) = (\mathscr{D} - id_E)((Q(k))_{k\in\mathbb{N}}) = (Q(k+1) - Q(k))_{k\in\mathbb{N}}$$

d'autre part

$$\Psi \circ \Delta_r(Q) = \Psi(Q(X+1) - Q(X)) = (Q(k+1) - Q(k))_{k\in\mathbb{N}} = (\mathscr{D} - id_E) \circ \Psi(Q)$$

Donc $(\mathscr{D} - id_E) \circ \Psi(Q) = \Psi \circ \Delta_r(Q)$.

4.3.2. On a d'après la question précédente $(\mathscr{D} - id_E) \circ \Psi = \Psi \circ \Delta_r$, alors

$$(\mathscr{D} - id_E)^2 \circ \Psi = (\mathscr{D} - id_E) \circ \Psi \circ \Delta_r = \Psi \circ \Delta_r^2$$

$$(\mathscr{D} - id_E)^3 \circ \Psi = (\mathscr{D} - id_E) \circ \Psi \circ \Delta_r^2 = \Psi \circ \Delta_r^3$$

ainsi de suite on a $(\mathscr{D} - id_E)^r \circ \Psi = \Psi \circ \Delta_r^r = 0$ car, d'après la question [4.1.4] on a Δ_r^r est nul.
On a $(\mathscr{D} - id_E)^r \circ \Psi = 0$, alors $\forall u = \Psi(Q) \in Im\Psi$, on a $(\mathscr{D} - id_E)^r(u) = (\mathscr{D} - id_E)^r \circ \Psi(Q) = 0$ donc $u \in \ker(\mathscr{D} - id_E)^r$. D'où $Im\Psi \subset \ker(\mathscr{D} - id_E)^r = \mathscr{I}_{(X-1)^r}(\mathbb{K})$.

4.3.3. D'après les questions [3.2.2] et [4.2.2], on a $\dim \mathscr{I}_{(X-1)^r}(\mathbb{K}) = r$ et $\dim Im\Psi = r$, et d'après la question précédente $Im\Psi$ est sous-espace vectoriel de $\mathscr{I}_{(X-1)^r}(\mathbb{K})$ des même dimension, alors

$$\mathscr{I}_{(X-1)^r}(\mathbb{K}) = Im\Psi = \{\Psi(Q), Q \in \mathbb{N}_{r-1}[X]\} = \{(Q(k))_{k\in\mathbb{N}}, Q \in \mathbb{N}_{r-1}[X]\}.$$

4.3.4. On a la famille $\left((1)_{k\in\mathbb{N}}, (k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (k^{r-1})_{k\in\mathbb{N}}\right)$ de cardinal égal à r et dont les éléments sont dans $\mathscr{I}_{(X-1)^r}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}$ dans $\mathbb{K}$ tel que

$$\alpha_0(1)_{k\in\mathbb{N}} + \alpha_1(k)_{k\in\mathbb{N}} + \cdots + \alpha_{r-1}(k^{r-1})_{k\in\mathbb{N}} = (0)_{k\in\mathbb{N}}$$

implique que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha_0 + \alpha_1 k + \cdots + \alpha_{r-1}k^{r-1} = 0$, implique que le polynôme $\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{r-1}X^{r-1}$ admet une infinité de racines, donc il est nul, alors $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$.
D'où la famille $\left((1)_{k\in\mathbb{N}}, (k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (k^{r-1})_{k\in\mathbb{N}}\right)$ est libre de cardinal égal à dimension de $\mathscr{I}_{(X-1)^r}(\mathbb{K})$, alors c'est une base.

3ème Partie
Expressions des éléments de $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$ selon $P \in \mathbb{K}[X]$

5.1. Cas où $P = X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

5.1.1. on a $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{X-\lambda}(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a_0 u_n = \lambda u_n$, car dans ce cas $r = 1$ et $P = X - a_0 = X - \lambda$.

5.1.2 On a d'après la question précédente si $\forall a \in \mathbb{K}$, la suite $a(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{X-\lambda}(\mathbb{K})$ donc $\{a(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}; a \in \mathbb{K}\} \subset \mathscr{I}_{X-\lambda}(\mathbb{K})$, et si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{X-\lambda}(\mathbb{K})$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n = \lambda^n u_0$, d'où $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = u_0(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. D'où $\{a(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}; a \in \mathbb{K}\} = \mathscr{I}_{X-\lambda}(\mathbb{K})$.

5.2. Cas où $P = X^r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$.

5.2.1. Dans ce cas on a $a_0 = \cdots = a_{r-1} = 0$. On a $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{X^r}(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+r} = \sum\limits_{q=0} a_q u_{n+q} = 0$ c'est à dire que $\forall n \geqslant r$, $u_n = 0$ par le changement d'indice. D'où les résultats.

5.2.2. Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha_0\varepsilon_0 + \cdots + \alpha_{r-1}\varepsilon_{r-1} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \quad (*)$. Alors on a

$$\begin{aligned}(*) &\iff (\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}, 0, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots)\\ &\iff \alpha_0 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0\end{aligned}$$

donc la famille $(\varepsilon_0, \ldots \varepsilon_{r-1})$ est libre de cardinal est égal à r (dimension de $\mathscr{I}_{X^r}(\mathbb{K})$) alors c'est une base de $\mathscr{I}_{X^r}(\mathbb{K})$.

5.3. Cas où $P = (X-\lambda)^r$ avec $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ et $r \in \mathbb{N}$ et $r \geqslant 2$.

5.3.1. Par la formule de binôme, on a

$$(X-\lambda)^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} X^i(-\lambda)^{r-i} = X^r + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} (-\lambda)^{r-i} X^i$$

5.3.2. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$, on a

$$\begin{aligned}(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ker(\mathscr{D} - \lambda id_E)^r &\iff (\mathscr{D} - \lambda id_E)^r((u_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (0)_{k\in\mathbb{N}}\\
&\iff \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-\lambda)^{r-i} \mathscr{D}^i((u_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (0)_{k\in\mathbb{N}}\\
&\iff \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-\lambda)^{r-i} (u_{k+i})_{k\in\mathbb{N}} = (0)_{k\in\mathbb{N}} \quad (\text{ car } \mathscr{D}^i((u_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (u_{k+i})_{k\in\mathbb{N}})\\
&\iff \forall k \in \mathbb{N},\quad \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-\lambda)^{r-i} u_{k+i} = 0\\
&\iff \forall k \in \mathbb{N},\quad \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-)^{r-i} \lambda^{-i} u_{k+i} = 0 \quad (\text{ on simplifier par } \lambda^r)\\
&\iff \iff \forall k \in \mathbb{N},\quad \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-)^{r-i} \frac{u_{k+i}}{\lambda^{k+i}} = 0 \quad (\text{ on divise par } \lambda^k)\\
&\iff \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-)^{r-i} \left(\frac{u_{k+i}}{\lambda^{k+i}}\right)_{k\in\mathbb{N}} = (0)_{k\in\mathbb{N}}\\
&\iff \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-)^{r-i} \mathscr{D}^i \left(\frac{u_k}{\lambda^k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = (0)_{k\in\mathbb{N}}\\
&\iff (\mathscr{D} - id_E)^r \left(\frac{u_k}{\lambda^k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = (0)_{k\in\mathbb{N}}\\
&\iff \left(\frac{u_k}{\lambda^k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \ker(\mathscr{D} - id_E)^r\end{aligned}$$

D'où $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ker(\mathscr{D} - \lambda id_E)^r$ si, et seulement si, $\left(\frac{u_k}{\lambda^k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \ker(\mathscr{D} - id_E)^r$.

5.3.3. D'après la question [4.3.3] on a

$$\mathscr{I}_{(X-1)^r}(\mathbb{K}) = Im\Psi = \{(Q(k))_{k\in\mathbb{N}}, Q \in \mathbb{N}_{r-1}[X]\}$$

et d'après la question précédente $(Q(k))_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{D} - id_E)^r = \mathscr{I}_{(X-1)^r}(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $(\lambda^k Q(k))_{k\in\mathbb{N}} \in \ker(\mathscr{D} - \lambda id_E)^r = \mathscr{I}_{(X-\lambda)^r}(\mathbb{K})$. Par conséquence on a

$$\mathscr{I}_{(X-\lambda)^r}(\mathbb{K}) = \left\{(\lambda^k Q(k))_{k\in\mathbb{N}}; Q \in \mathbb{K}_{r-1}[X]\right\}.$$

5.4. Cas où $P=(X-\lambda)(X-\mu)^r$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq\mu$ et $r\in\mathbb{N}^*$.

5.4.1. On considère l'application

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{K}_r[X]&\longrightarrow\mathbb{K}_r[X]\\ Q&\longmapsto \alpha Q(X+1)-Q(X)\end{aligned}$$

Soient $Q,Q'\in\mathbb{K}_r[X]$ et $\beta\in\mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\beta Q+Q')&=\alpha(\beta Q+Q')(X+1)-(\beta Q+Q')(X)\\&=\alpha\beta Q(X+1)-Q(X)+\alpha Q'(X+1)-Q'(X)\\&=\beta\varphi(Q)+\varphi(Q').\end{aligned}$$

Alors φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_r[X]$ dont sa matrice dans base canonique de $\mathbb{K}_r[X]$ est

$$M=\begin{pmatrix}\alpha-1&\times&\cdots&\times\\0&\alpha-1&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\times\\0&\cdots&0&\alpha-1\end{pmatrix}$$

avec $M_{i,j}=\binom{j}{i}$ si $i<j$.

5.4.2. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$, c'est à dire que $P(\mathscr{D})((u_k)_{k\in\mathbb{N}})=(0)_{k\in\mathbb{N}}$, alors

$$(\mathscr{D}-\lambda id_E)(\mathscr{D}-\mu id_E)^r((u_k)_{k\in\mathbb{K}})=(\mathscr{D}-\mu id_E)^r(\mathscr{D}-\lambda id_E)((u_k)_{k\in\mathbb{K}})=(0)_{k\in\mathbb{K}}$$

donc $(\mathscr{D}-\lambda id_E)((u_k)_{k\in\mathbb{K}})=(0)_{k\in\mathbb{K}}\in\mathscr{I}_{(X-\mu)^r}(\mathbb{K})=\{(\mu^kQ(k))_{k\in\mathbb{N}};Q\in\mathbb{K}_{r-1}[X]\}$ (d'après la question [5.3.3]), d'où il existe $Q\in\mathbb{K}_{r-1}[X]$ tel que $(\mathscr{D}-\lambda id_E)((u_k)_{k\in\mathbb{K}})=(\mu^kQ(k))_{k\in\mathbb{N}}$, implique que $(u_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}-\lambda(u_k)_{k\in\mathbb{N}}=(\mu^kQ(k))_{k\in\mathbb{N}}$, d'où

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad u_{k+1}-\lambda u_k=\mu^kQ(k).$$

5.4.3. Soit $Q_1\in\mathbb{K}_{r-1}[X]$ un polynôme tel que $\frac{\mu}{\lambda}Q_1(X+1)-Q_1(X)=Q(X)$. On a d'après la question précédente

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad u_{k+1}-\lambda u_k=\mu^kQ(k).$$

Raisonnement par récurrence, pour $n=0$, on a $u_0=u_0\lambda^0-\frac{1}{\lambda}Q_1(0)\lambda^0+\frac{\mu^0}{\lambda}Q_1(0)$.
Supposons que les résultats est vrai pour $n\in\mathbb{N}$, c'est à dire $u_n=u_0\lambda^n-\frac{1}{\lambda}Q_1(0)\lambda^n+\frac{\mu^n}{\lambda}Q_1(n)$ et les montrons pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned}u_{n+1}-\lambda u_{u_n}=\mu^nQ(n)&\iff u_{n+1}-\lambda u_n=\mu^n\left(\frac{\mu}{\lambda}Q_1(n+1)-Q_1(n)\right)\\&\iff u_{n+1}=\lambda\left(u_0\lambda^n-\frac{1}{\lambda}Q_1(0)\lambda^n+\frac{\mu^n}{\lambda}Q_1(n)\right)+\frac{\mu^{n+1}}{\lambda}Q_1(n+1)-\mu^nQ_1(n)\\&\iff u_{n+1}=u_0\lambda^{n+1}-\frac{1}{\lambda}Q_1(0)\lambda^{n+1}+\frac{\mu^{n+1}}{\lambda}Q_1(n+1)\end{aligned}$$

D'où par le principe de récurrence, on a

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=u_0\lambda^n-\frac{1}{\lambda}Q_1(0)\lambda^n+\frac{\mu^n}{\lambda}Q_1(n).$$

5.4.4. On a d'après la question précédente si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{I}_{(X-\lambda)(X-\mu)^r}(\mathbb{K})$ alors

$$\begin{aligned}&\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=u_0\lambda^n-\frac{1}{\lambda}Q_1(0)\lambda^n+\frac{\mu^n}{\lambda}Q_1(n)=(u_0-\frac{1}{\lambda}Q_1(0))\lambda^n+\mu^n\frac{1}{\lambda}Q_1(n)\\ \iff&\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\beta\lambda^n+\mu^nR(k)\quad\text{ où }\beta=(u_0-\frac{1}{\lambda}Q_1(0)),Q=\frac{1}{\lambda}Q_1\end{aligned}$$

d'où $\mathscr{I}_{(X-\lambda)(X-\mu)^r}(\mathbb{K}) \subset \{(\beta\lambda^k + \mu^k R(k))_{k\in\mathbb{N}}; \beta \in \mathbb{K}, R \in \mathbb{K}_{r-1}[X]\}$.
Inversement. Soient $\beta \in \mathbb{K}, R \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$, d'après la question [5.3.3] on a $(\mu^k R(k))_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{(X-\mu)^r}(\mathbb{K})$. D'autre part on a $(\beta\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{(X-\lambda)}(\mathbb{K})$ en effet :

$$(\mathscr{D} - \lambda)((\beta\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}) = (\beta\lambda^{k+1})_{k\in\mathbb{N}} - \lambda(\beta\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}} = (0)_{k\in\mathbb{N}}$$

D'où

$$(\mathscr{D} - \lambda id_E)(\mathscr{D} - \mu id_E)^r((\mu^k R(k))_{k\in\mathbb{N}}) = (\mathscr{D} - \lambda id_E)((0)_k) = (0)_k$$

et

$$(\mathscr{D}-\lambda id_E)(\mathscr{D}-\mu id_E)^r((\beta\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}) = (\mathscr{D}-\mu id_E)^r(\mathscr{D}-\lambda id_E)((\beta\lambda^{k+1})_{k\in\mathbb{N}}) = (\mathscr{D}-\mu id_E)^r((0)_k) = (0)_k$$

Donc $(\beta\lambda^k + \mu^k R(k))_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_{(X-\lambda)(X-\mu)^r}(\mathbb{K})$. D'où les résultats.

5.4.5. **Étude d'un premier exemple.**
On a

$$\begin{aligned} P_1 = X^4 + 2X^3 - 2X - 1 &= X^4 - 1 + 2X(X^2 - 1) \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + 1) + 2X(X - 1) \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + 2X + 1) = (X - 1)(X + 1)(X + 1)^2 \\ &= (X - 1)(X + 1)^3 \end{aligned}$$

donc les racines de P_1 sont $\{-1, 1\}$. et $P_1 = (X - 1)(X + 1)^3$. Dans ce cas $\lambda = 1$, $\mu = -1$ et $r = 3$, alors d'après la questions précédente, on a

$$\mathscr{I}_{P_1}(\mathbb{K}) = \{(\beta + (-1)^k R(k))_{k\in\mathbb{N}}; \beta \in \mathbb{K}, R \in \mathbb{K}_2[X]\}.$$

5.5. Soit $P = (X - \lambda)(X - \mu)^r$ où $\lambda \neq 0$.
Si $\lambda \neq \mu$ c'est le cas de la question [5.4].
Si $\lambda = \mu$ c'est le cas de la question [5.3] avec $r + 1$ au lieu de r.

5.6. Cas où $P = (X - \lambda)Q$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $Q \in \mathbb{K}_r[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

5.6.1. Supposons que $Q(X) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i X^i \in \mathbb{K}_r[X]$. On a

$$\begin{aligned} P(\mathscr{D}) &= (\mathscr{D} - \lambda id_E) \circ Q(\mathscr{D}) \\ &= \mathscr{D} \circ Q(\mathscr{D} - \lambda id_E \circ Q(\mathscr{D}) \\ &= \sum_{i=0}^{r} \alpha_i \mathscr{D}^{i+1} - \lambda Q(\mathscr{D}) \quad \text{car } \mathscr{D} \circ \mathscr{D}^i = \mathscr{D}^{i+1} \\ &= Q(\mathscr{D}) \circ \mathscr{D} - \lambda Q(\mathscr{D}) \\ &= Q(\mathscr{D}) \circ (\mathscr{D} - \lambda id_E). \end{aligned}$$

D'où $P(\mathscr{D}) = Q(\mathscr{D}) \circ (\mathscr{D} - \lambda id_E) = (\mathscr{D} - \lambda id_E) \circ Q(\mathscr{D})$.

5.6.2. On a

$$\begin{aligned} (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathscr{I}_P(\mathbb{K}) &\iff P(\mathscr{D})((u_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (0)_{k\in\mathbb{N}} \\ &\iff Q(\mathscr{D} \circ (\mathscr{D} - \lambda id_E)((u_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (0)_{k\in\mathbb{N}} \\ &\iff (\mathscr{D} - \lambda id_E)((u_k)_{k\in\mathbb{N}}) \in \ker Q(\mathscr{D}) \\ &\iff (\mathscr{D} - \lambda id_E)((u_k)_{k\in\mathbb{N}}) \in \mathscr{I}_Q(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

5.7. **Cas général :** On suppose que le polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$, où r est un entier $\geqslant 2$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$, et $m_1, \ldots, m_r$ des entiers naturels non nuls.

5.7.1.

5.7.2. D'après la question précédente, on a

$$\mathscr{I}_P(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathscr{I}_{(X-\lambda_k)^{m_k}}(\mathbb{K}).$$

Et d'après la question [5.3.3], on a $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\mathscr{I}_{(X-\lambda_k)^{m_k}}(\mathbb{K}) = \{(\lambda_k^n Q(n))_{n\in\mathbb{N}}; Q \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X]\}$ donc la famille $\left\{(\lambda_k^n n^i)_{n\in\mathbb{N}}, i \in [\![0, m_k - 1]\!]\right\}$ est une base de $\mathscr{I}_{(X-\lambda_k)^{m_k}}(\mathbb{K})$ (à partir de la base canonique de $\mathbb{K}_{m_k-1}[X]$). D'où la famille

$$\bigcup_{k=1}^{r} \{(\lambda_k^n n^i)_{n\in\mathbb{N}}, i \in [\![0, m_k - 1]\!]\}$$

est une base de $\mathscr{I}_P(\mathbb{K})$.

5.8. **Théorème de d'Alembert-Gauss :** Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire, alors d'après le théorème d'Alembert-Gauss P est scindé c'est à dire il existe un entier $\geqslant 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{C}$, et $m_1, \ldots, m_r$ des entiers naturels non nuls, tel que

$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

5.9. **Étude d'un deuxième exemple** Puisque 1 est un racine triple de P_2, on fait la division euclidienne de P_2 sur $(X-1)^3$, on trouve que

$$P_2 = (X^4 + 2X^2 + 1)(X-1)^3$$

et on a $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$, donc $P_2 = (X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2$.Alors d'après la question [5.7.1] on a

$$\mathscr{I}_{P_2}(\mathbb{C}) = \{(R_1(n) + i^n R_2(n) + (-i)^n R_3(n))_{n\in\mathbb{N}}; R_1 \in \mathbb{C}_2[X], R_2 \in \mathbb{C}_1[X], R_3 \in \mathbb{C}_1[X]\}.$$